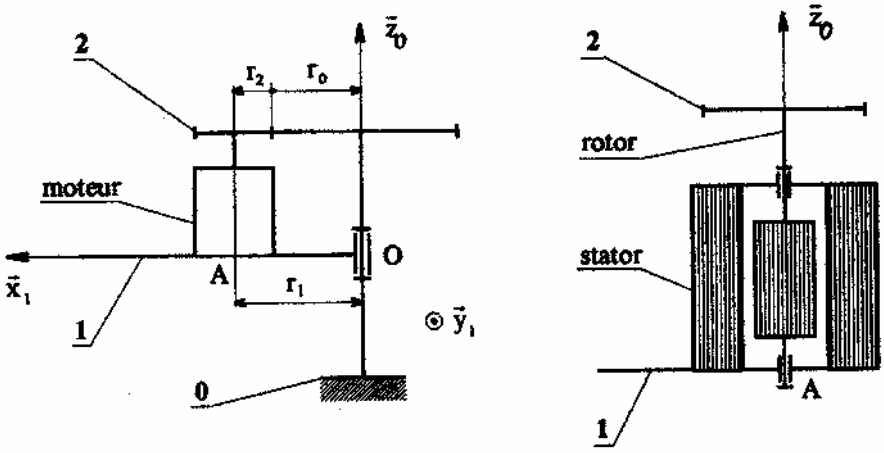
Mécanique des solides indéformables

Energétique
Exercices de travaux dirigés

Sommaire

1 Moteur d'entraînement d'un bras de robot....2
2 Éolienne....3
3 Centrifugeuse d'entraînement des pilotes d'avion de chasse....3
4 Mélangeur de peinture....4
5 Lanceur décaressort....6
6 Réducteur à train épicycloïdal....7
7 Robot....8
8 Disque sur piste circulaire D'après un exercice de Philippe MARON, université de Pau....9
9 Étude d'une chaîne de transmission de puissance....10
10 Devoir de mécanique....15
11 Volant sur piste circulaire....17
12 Chaîne de puissance d'un chariot transpalettes....18
13 Étude de la chaîne cinématique de l'axe Z d'une machine outil à commande numérique....22

1 Moteur d'entraînement d'un bras de robot



R_0 $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au bâti **0** d'un robot. Le bras **1** est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti **0**. Soit R_1 $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ le repère lié au bras **1**. On pose : $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega_1 \vec{z}_{0,1}$

Un moteur d'axe $(A, \vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{OA} = r_1 \vec{x}_1$ a son stator fixé au bras **1** et son rotor **2** entraîne en rotation le bras **1** par l'intermédiaire d'un engrenage à axes parallèles dont une roue est fixe par rapport à R_0.

La roue liée au rotor **2** a pour rayon primitif r_2 et celle liée au bâti **0** a pour rayon primitif r_0. On pose : $\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \omega_2 \vec{z}_{0,1}$

Le guidage en rotation de **2** par rapport à **1** est réalisé par une liaison pivot sans frottement d'axe $(A, \vec{z}_0)$.

Les caractéristiques d'inertie sont les suivantes :

- I_1: moment d'inertie du bras **1** et du stator par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$
- m_1: masse du bras **1** et du stator
- G_1: centre d'inertie du bras **1** et du stator tel que $\overrightarrow{OG_1} = L \vec{x}_1$
- I_2: moment d'inertie du rotor **2** et de la roue dentée par rapport à l'axe $(A, \vec{z}_0)$
- m_2: masse du rotor **2** et de la roue dentée
- G_2: centre d'inertie du rotor **2** et de la roue dentée tel que $\overrightarrow{OG_2} = r_1 \vec{x}_1 + h \vec{z}_0$

Questions:

1- Faites un graphe des liaisons du mécanisme.

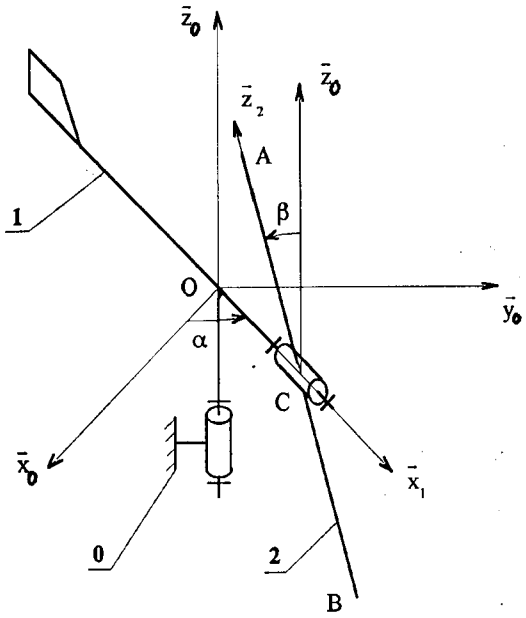
2- Déterminez la puissance de l'action mécanique du stator **1** sur le rotor **2**, dans le mouvement du rotor **2** par rapport au bâti **0**.

3- Déterminez la puissance des actions mutuelles entre le stator **1** et le rotor **2**.

4- Déterminez l'accélération angulaire de bras **1** par rapport au bâti **0** en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E = {**1**, **2**, moteur}.

2 Éolienne

Ci-contre est représenté le schéma cinématique spatial d'une éolienne. Le repère R_0 $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère fixe (lié à la terre). La girouette **1** est en liaison pivot d'axe avec $(O, \vec{z}_0)$ le support **0**.



Soit R_1 $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un repère lié à la girouette **1**. Le paramètre de rotation est $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

L'hélice **2** est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{x}_1)$ avec la girouette **1**, tel que $\overrightarrow{OC} = a\,\vec{x}_1$, *a* étant une constante positive.

Soit R_2 $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à l'hélice **2**, de telle façon que l'axe $(C, \vec{z}_2)$ soit confondu avec l'axe AB de la pale de l'hélice. On pose $\overrightarrow{CA} = b\,\vec{z}_2$ *b* étant une constante positive et . $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$

α et β sont deux fois dérivables.

On considère qu'il existe un balourd 3 modélisant un déséquilibre de l'hélice en rotation, représenté par une masse ponctuelle au point A

Les caractéristiques d'inertie des différents solides sont les suivantes :

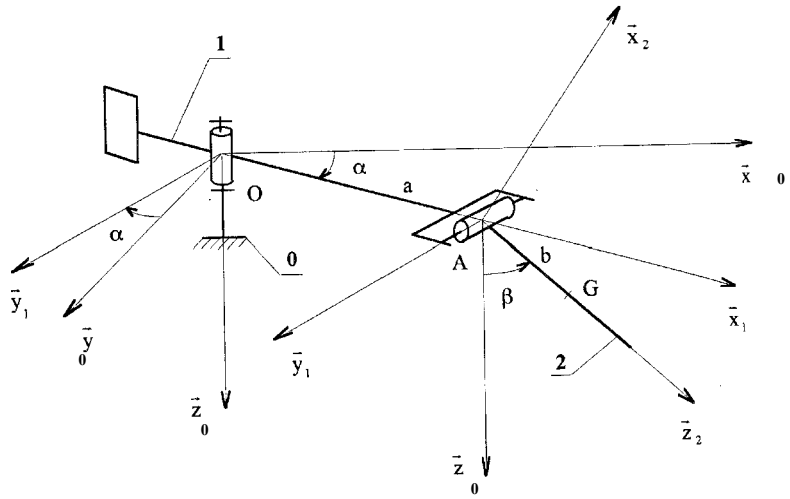
- Girouette 1 : - masse m_1
  - moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$: I_1
- Hélice 2 : - masse m_2
  - centre d'inertie C
  - matrice d'inertie au point C dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: $I(C,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
- Balourd 3 : - masse m3 au point A.

Question :

Déterminez l'énergie cinétique de l'ensemble E = {1, 2, 3} dans son mouvement par rapport au repère R_0.

3 Centrifugeuse d'entraînement des pilotes d'avion de chasse

Soit R_0 $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère lié au bâti **0** de la centrifugeuse. L'axe $(O,\vec{z}_0)$ est dirigé suivant la verticale descendante.



Le bras 1 est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti 0. Soit R_1 $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ un repère lié au bras 1. On pose $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$, avec , $\dot{\alpha}=\omega t$ où ω est une constante positive.

La cabine 2 est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{y}_1)$ avec le bras 1, telle que : $\overrightarrow{OA}=a\vec{x}_1$ (a constante positive). Soit R_2 $(A,\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)$ un repère lié à la cabine 2. On pose $\beta=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)$ tel que β soit au moins deux fois dérivable.

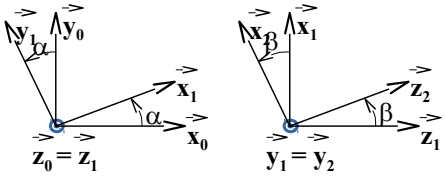
Le moment d'inertie du bras 1 par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$ vaut I

Les propriétés de masse de la cabine 2 sont les suivantes :

- Masse m
- Position du centre d'inertie G tel que: $\overrightarrow{AG}=b\vec{z}_2$ (b constante positive).

Matrice d'inertie en G de 2: $I(G,2)=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$

1- Faites un graphe des liaisons du mécanisme.



2- Déterminez l'énergie cinétique du bras 1 dans son mouvement par rapport au repère R_0.

$$\overrightarrow{V(G0)}=\begin{pmatrix} b\dot{\beta} \\ (a+b\sin(\beta))\omega \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

3- Déterminez l'énergie cinétique de la cabine 2 dans son mouvement par rapport au repère R_0.

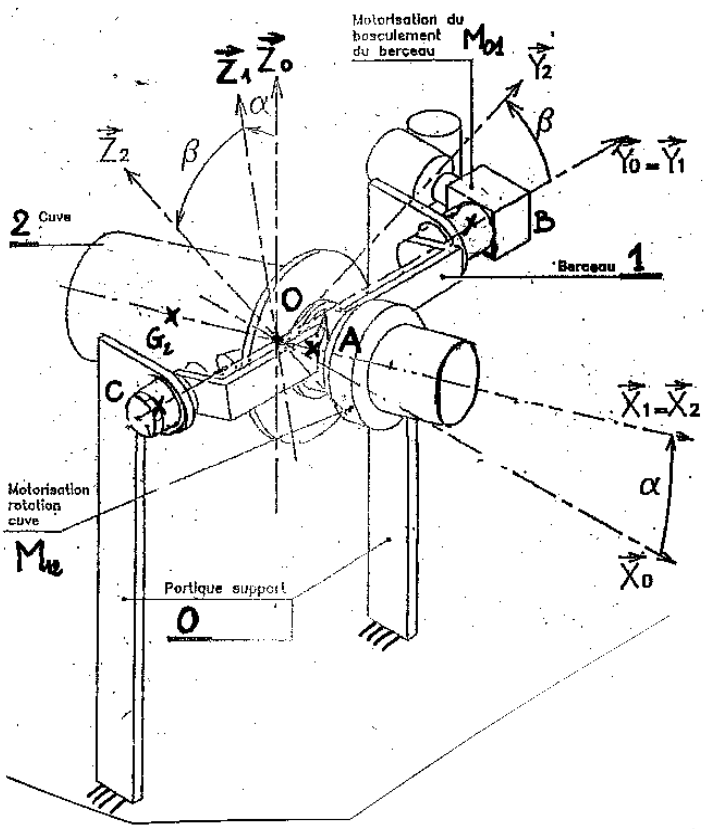
4- Déterminez l'énergie cinétique de l'ensemble 1+2 dans son mouvement par rapport au repère R_0.

5- Appliquez le théorème de l'énergie cinétique à la cabine 2 dans son mouvement par rapport au repère R_0.

6- Comparez le résultat avec celui obtenu en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (exercice 1.4.)

7- Quelle est la valeur de l'angle β $0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$ lorsque la cabine 2 est en équilibre relatif stable par rapport au bras 1 ?

4 Mélangeur de peinture



Le système représenté ci-dessous est un mélangeur de peinture.

Il est composé principalement d'un support **0**, d'un berceau **1** et d'une cuve **2**.

Le berceau **1** est guidé en B et C par rapport au support **0** et est entraîné en rotation grâce au moto-réducteur $\mathbf{M_{01}}$.

La cuve **2** est guidée en A (liaison pivot) par rapport au berceau **1** et est entraînée en rotation grâce au moteur $\mathbf{M_{12}}$.

Après avoir rempli la cuve, le système tourne autour de deux axes perpendiculaires pendant 5 minutes.

La schématisation adoptée pour l'étude de ce mélangeur de peinture est la suivante:

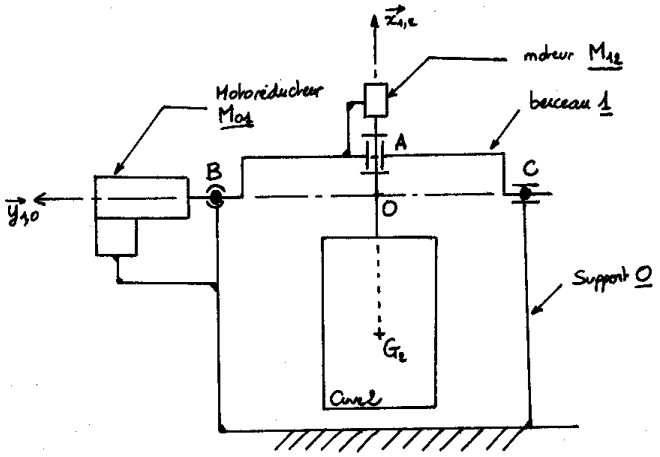
Soit R_0 $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ le repère lié au support **0**. R_0 $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est supposé galiléen. est $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant.

Les caractéristiques d'inertie données ci-après pour chaque solide tiennent compte des parties des actionneurs qui lui sont rigidement liés. On néglige la masse des autres parties des actionneurs devant la masse du berceau et de la cuve.

1: berceau.

Repère associé: R_1 $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$. Mouvement de **1** par rapport au support **0**: rotation d'axe $(O,\vec{y}_{0,1})$ commandée par le moto réducteur $\mathbf{M_{01}}$. La position angulaire de **1** par rapport à **0** est repérée par $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)$. La liaison entre le support **0** et le berceau **1** est parfaite et est obtenue par deux paliers en B et en C tels que: $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}=c\,\vec{y}_0$. La masse du solide **1** est m_1, son centre d'inertie est A, tel que: $\overrightarrow{OA}=a\,\vec{x}_1$, sa matrice d'inertie en A est

$$I(A,1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$



Le moto réducteur $\mathbf{M_{01}}$, monté entre le support **0** et le berceau **1**, impose la fonction $\alpha(t)$ (fonction connue, deux fois dérivable, imposée dans le cahier des charges du mélangeur).

2: cuve.

Repère associé: R_2 $(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$. Mouvement de **2** par rapport à **1**: rotation d'axe $(O,\vec{x}_1)$ commandée par le moteur $\mathbf{M_{12}}$. La position angulaire de **2** par rapport à **1** est repérée par $\beta=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)$. La liaison entre le berceau **1** et la cuve **2** est parfaite. La masse du solide **2** est m_2, son centre d'inertie est G_2 tel que $\overrightarrow{AG_2}=-b\,\vec{x}_1$, sa matrice d'inertie en G_2 est

$$I(G_2,2)=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_{1,2},-,-)}$$

Le moto réducteur $\mathbf{M_{12}}$, monté entre le berceau **1** et la cuve **2**, impose la fonction β(t) (fonction connue, deux fois dérivable, imposée dans le cahier des charges du mélangeur).

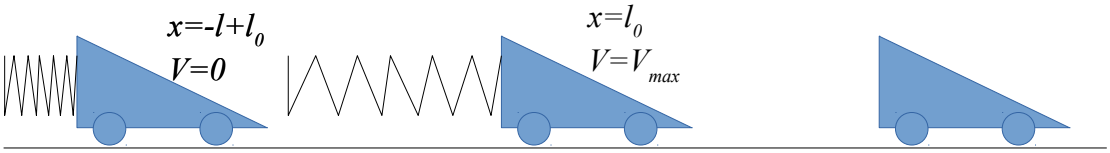
Cette étude dynamique du mélangeur vise à calculer les couples C_{01} et C_{12} délivrés par les moteurs $\mathbf{M_{01}}$ et $\mathbf{M_{12}}$

1- Faites un graphe des liaisons du mécanisme.
2- Calculez l'énergie cinétique du solide **2** dans son mouvement par rapport à R_0.
3- Appliquez le théorème de l'énergie cinétique à la cuve **2** dans son mouvement par rapport au repère R_0. L'équation obtenue est-t-elle intéressante ?
4- Appliquez le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E = **{1, 2}** dans son mouvement par rapport au repère R_0. L'équation obtenue est-t-elle intéressante ?
5- Comparez ces résultats à ceux obtenus en dynamique (T.D. 7 de la première série).
6- Applications numériques: les données numériques sont les suivantes:

$m_1 = 70$ kg	$a = 200$ mm	$\ddot{\alpha}=\ddot{\beta}$ $=0{,}25$ rad.s^{-2}	$A_2 = 3{,}13$ kg.m²
$m_2 = 100$ kg	$b = 550$ mm	$\dot{\alpha}=\dot{\beta}$ $=2{,}2$ rad.s^{-1}	$B_2 = 3{,}65$ kg.m²
$g = 9{,}81$ m.s^{-2}	$c = 400$ mm	$\alpha=\beta$ $= 9{,}68$ rad	$B_1 = 0{,}25$ kg.m²

5 Lanceur de voiture jouet

Objectif : Propulser la voiture sur 20 m en quelques secondes sans la détruire



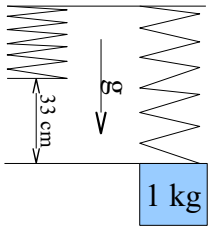
1 hypothèses

Véhicule de masse m, partie mobile du lanceur de masse m_l , ressort de raideur k dont l'extrémité est en x = l_0 en l'absence de traction ou de compression, force de frottement (globale) supposée constante et égale à F

2 Modélisation : deux phases de mouvement

1 a) phase de lancement

le ressort est comprimé pour que la position de l'arrière de la voiture soit x=0. La partie mobile du lanceur et la voiture sont supposés solidaires durant cette phase. L'ensemble est en liaison glissière d'axe x (horizontal) relativement au galiléen.
Cette phase se termine à l'intant $t=t_{l_0}$ pour lequel l'accélération de l'ensemble voiture + lanceur devient nulle (puis négative)
Pendant la phase de lancement, le lanceur et le véhicule sont mis en mouvement et acquièrent petit à petit de l'énergie cinétique à partir de l'énergie fournie par le ressort.
a) Calculer l'énergie fournie par le ressort pour une course égale à l_0
b) Calculer l'énergie dépensée par frottement sur une course de l_0
c) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, en déduire la vitesse atteinte par le véhicule au moment ou le lanceur le lâche
d) Écrire en fonction de x le théorème de conservation de l'énergie mécanique. Le dériver une fois. En déduire l'équation différentielle du mouvement
e) Résoudre cette équation différentielle. En déduire le temps $t=t_{l_0}$ en fonction de k, m, m_l, F.
f) Donner la valeur de l'accélération initiale. Que peut on en dire ?
g) : Application numérique



- m = 0,2 kg
- m_l = 1 kg
- l_0 = 0,9 m
- le système est composé de 10 ressorts identiques montés en parallèle, du type ci contre
- la force de frottement est estimée égale à 1 N

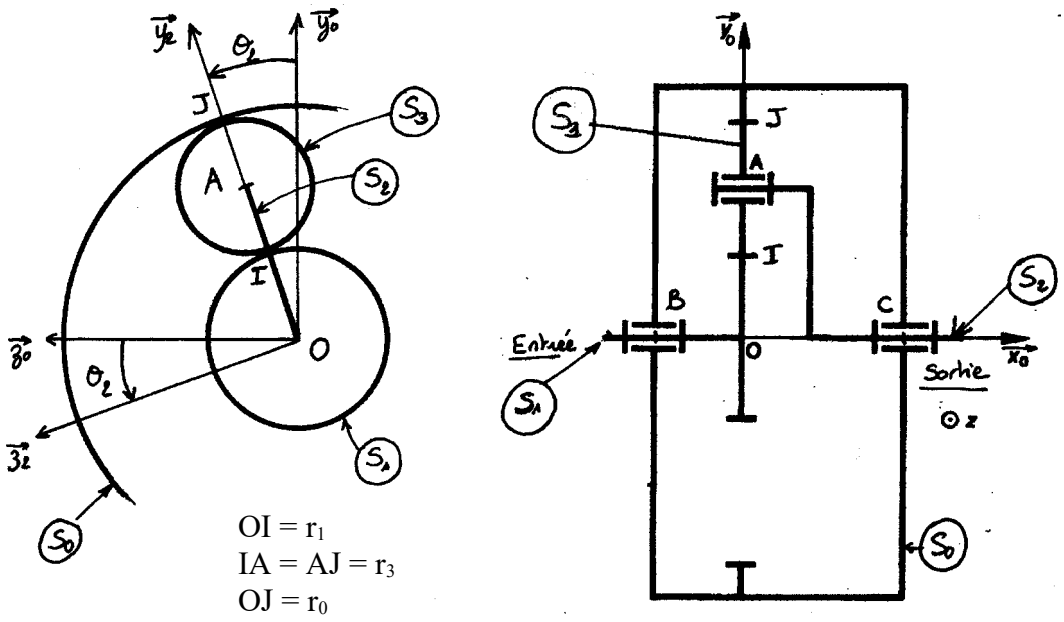
Quelle est la vitesse maximale atteinte par le véhicule
Que vaut $t=t_{l_0}$

2 b) bolide lancé

Cette phase commence immédiatement après la précédente. La vitesse du véhicule au début de cette phase est égale à la vitesse acquise à la fin de la phase précédente. Le véhicule est supposé en liaison glissière d'axe x horizontal par rapport au galiléen. La masse et les frottements appliqués sur le véhicule sont les mêmes que précédemment. La masse du lanceur n'a plus d'influence. Cette phase commence en x = l_0 à l'instant $t=t_{l_0}$
a) Donner l'énergie cinétique du véhicule au début de la phase
b) Calculer l'énergie perdue par frottement en fonction de x
c) En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, indiquer la distance que va parcourir le véhicule avant de s'arrêter
d) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de x =f(t).
e) Application numérique
Calculer la distance maximale parcourue par le véhicule
Calculer le temps mis par le véhicule pour parcourir 20 m (s'il le peut)

6 Réducteur à train épicycloïdal

Le schéma de principe d'un réducteur à train épicycloïdal à axes parallèles est représenté ci dessous.



OI = r_1
IA = AJ = r_3
OJ = r_0

Volontairement, la vue de droite ne correspond pas tout à fait à la vue de face pour montrer l'angle θ_2.

R_0 $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est le repère fixe, tel que $(O,\vec{y}_0)$ est vertical ascendant.

S_1 est l'arbre d'entrée du réducteur, appelé aussi **planétaire**. Il est en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x}_0)$ avec le bâti S_0. Son taux de rotation par rapport à R_0 vaut : $\vec{\Omega}(1/0)=\omega_1\vec{x}_0$ Il a un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_0)$ .Sa masse est m_1.

S_2 est l'arbre de sortie du réducteur. Il est aussi appelé **porte satellite**. Il est en liaison pivot d'axe $(C,\vec{x}_0)$ avec le bâti S_0. Son taux de rotation par rapport à R_0 vaut : $\vec{\Omega}(2/0)=\dot{\theta}_2\vec{x}_0=\omega_2\vec{x}_0$. Il a un moment d'inertie I_2 par rapport à l'axe . Sa $(O,\vec{x}_0)$ masse est m_2.

S_3 est le **satellite** du réducteur. Il est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{x}_0)$ avec le porte satellite S_2. Son taux de rotation par rapport à S_2 vaut : . $\vec{\Omega}(3/2)=\omega_3\vec{x}_0$ Il a un moment d'inertie I_3 par rapport à l'axe $(A,\vec{x}_0)$. Sa masse est m_3. A est son centre d'inertie.

I est le point d'engrènement de l'arbre d'entrée S_1 avec le satellite S_3. J est le point d'engrènement du satellite S_3 avec la couronne, solidaire du bâti S_0.

Le moteur exerce sur S_1 une action mécanique représentée par un couple C_1. Le récepteur exerce sur S_2 une action mécanique représentée par le couple C_2. Toutes les liaisons sont parfaites, **l'action mécanique de la pesanteur est négligée** devant les autres actions mécaniques.

1- Faites un graphe des liaisons du mécanisme. Vous n'oublierez pas de faire apparaître le moteur et le récepteur.

2- Écrire les conditions de roulement sans glissement au point I, puis au point J. En déduire le rapport de transmission (rapport des vitesses sortie sur entrée).

3- Déterminez l'énergie cinétique de l'ensemble E = {S_1, S_2, S_3} dans leur mouvement par rapport à R_o. Exprimez le résultat en fonction de la vitesse angulaire d'entrée ω_1. En déduire **l'inertie équivalente** de la chaîne cinématique rapportée à l'arbre moteur.

4- Appliquez le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E = {S_1, S_2, S_3} dans son mouvement par rapport à R_o de façon à déterminer le couple moteur nécessaire en entrée du réducteur : C_1.

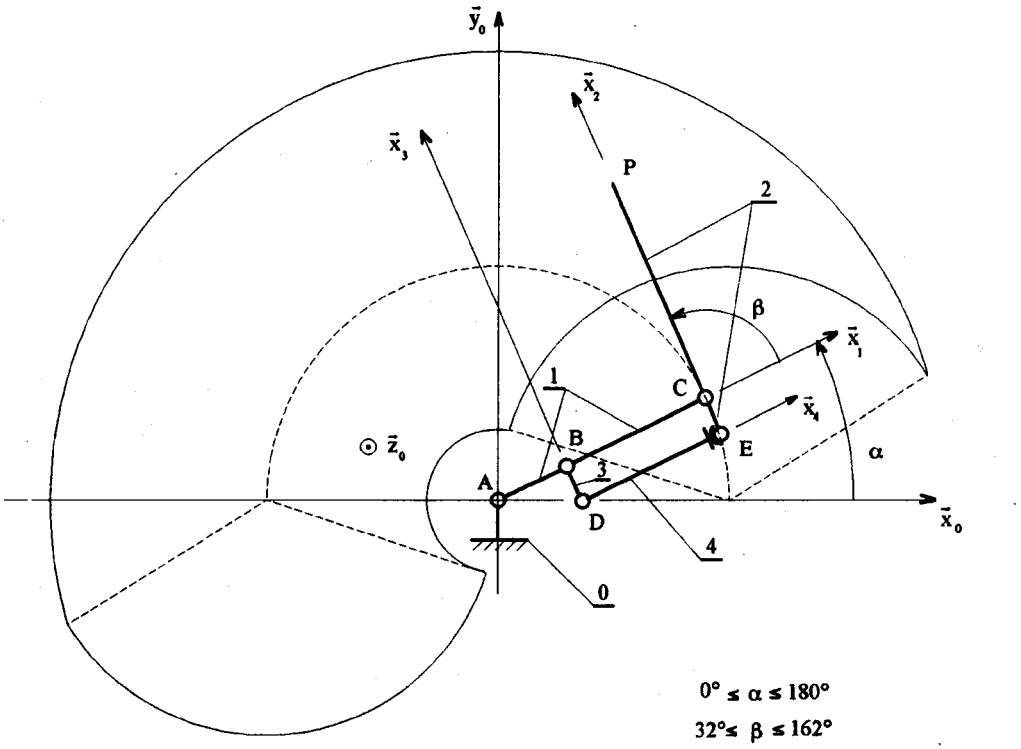
7 Robot

Le robot schématisé sur la figure ci-dessous est constitué de quatre bras repérés **1**, **2, 3, 4.** Sur cette figure, l'enveloppe de travail du point P dans le référentiel lié au bâti 0 a été représentée en traits fins.

On note $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ la base orthonormée directe liée au solide ***i*** **,** telle que $\vec{z}_i = \vec{z}_0$.
Le bras **1** (ABC) est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec le bâti **0**.
Le bras **2** (ECP) est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_1)$ avec le bras **1**.
Le bras **3** (BD) est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_1)$ avec le bras **1**.
Le bras **4** (DE) est :

- d'une part, en liaison linéaire annulaire de centre E et de direction $\vec{z}_2$ avec le bras **2,**
- d'autre part, en liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_3)$ avec le bras **3.**

Un poignet **P** destiné à recevoir les outillages est monté à l'extrémité P du bras **2.** Les mouvements du poignet par rapport au bras **2** (rotations autour de $(P, \vec{x}_2)$ et autour d'un axe perpendiculaire) sont supposés bloqués. Par la suite, le poignet **P** et le bras **2** ne seront plus distingués.



Ce robot présente deux degrés de mobilité commandés par deux moto réducteurs MI et M2 indépendants, non représentés :

- M1 a pour axe de rotation (A, ⋮) ; son stator est lié au bâti **0** et son rotor au bras **1**.
- M2 a pour axe de rotation (B, ⋮) ; son stator est lié au bras **1** et son rotor au bras **3**.

Les masses et les inerties des composants des moteurs sont comprises dans les caractéristiques des bras auxquels ils sont liés, caractéristiques données ci après :

On note : G_i : centre d'inertie du solide **i**
m_i : masse du solide **i**.

Bras **1** (ABC)

$\overrightarrow{AB}=2L\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AC}=6L\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AG_1}=3L\vec{x}_1$ $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$

I_1 : moment d'inertie du bras **1** par rapport à l'axe $(A,\vec{z}_1)$

Bras **2** (ECP)

$\overrightarrow{EC}=L\vec{x}_2$ $\overrightarrow{CP}=6L\vec{x}_2$ $\overrightarrow{CG_2}=3L\vec{x}_2$ $\beta=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$

I_2 : moment d'inertie du bras **2** par rapport à l'axe $(C,\vec{z}_2)$

Bras **3** (DB)

$\overrightarrow{DB}=L\vec{x}_3$, $\beta=(\vec{x}_1,\vec{x}_3)=(\vec{y}_1,\vec{y}_3)$ Masse nulle.

Bras **4** (DE)

$\overrightarrow{DE}=4L\vec{x}_4$ $\overrightarrow{DG_4}=2.L.\vec{x}_4$ $\overrightarrow{DG_4}=2L\vec{x}_4$

$\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_4)=(\vec{y}_0,\vec{y}_4)$

I_4 : moment d'inertie du bras **4** par rapport à l'axe $(G4,\vec{z}_4)$

Hypothèses :

- Toutes les liaisons sont parfaites
- L'accélération de la pesanteur vaut : $\vec{g}=-g.\vec{z}_0$
- Le couple exercé par le moteur M_1 vaut C_{01}
- Le couple exercé par le moteur M_2 vaut C_{13}

Questions :

1- Faites un graphe des liaisons du mécanisme. Vous n'oublierez pas de faire apparaître les 2 moteurs.
2- Calculez les énergies cinétiques suivantes : T(1/O), T(2/0), T(3/0) et T(4/0).
3- Calculez la puissance des actions mécaniques extérieures à l'ensemble E = {**1** U **2** U **3** U **4** U **M2**} dans son mouvement par rapport à R_0.
4- Calculez la puissance des actions mutuelles entre les différents solides de l'ensemble E = {**1** U **2** U **3** U **4** U **M2**} dans son mouvement par rapport à R_0.
5- Écrire une équation de mouvement du robot déduite du théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble E = {**1** U **2** U **3** U **4** U **M2**} dans son mouvement par rapport à R_0. Vous ne développerez pas les calculs.

8 Disque sur piste circulaire D'après un exercice de Philippe MARON, université de Pau

On considère un système constitué d'une tige (T) de masse m de longueur L et de rayon négligeable et d'un disque (D) de centre C de masse $9m$ de rayon $\frac{L}{3}$ et d'épaisseur négligeable.

La tige est articulée au point O par une liaison pivot d'axe Oz et est liée au disque par une liaison pivot en C d'axe $(C,\vec{z})$. Le disque est en contact permanent au point I avec un solide (S) immobile.

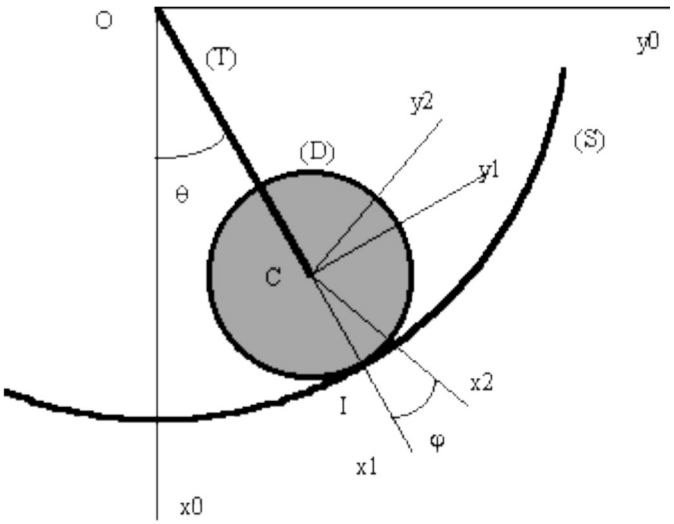
On repère les mouvements du système par les paramètres θ et φ tels que:

Soit R_0 $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z})$ le repère de référence lié à (S),

soit R_1 $(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ un repère mobile lié à (T) tel que $\theta=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.

Soit R_2 $(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z})$ un repère mobile lié au disque (D) tel que $\varphi=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$.

On supposera qu'il y a roulement sans glissement en I.



1 I- étude de la tige

Soit G le centre de gravité de la tige (T).

1)- Calculez la vitesse de G.

2)- Donnez la matrice d'inertie de la tige (T) au point G dans b_1.

3)- Calculez le torseur cinétique de la tige au point G.

4)- Calculez le torseur dynamique de la tige au point C.

5)- Calculez l'énergie cinétique de la tige (T).

6)- Calculez l'énergie potentielle de la tige (T).

7)- Écrire les équations découlant du PFD pour la tige (T).

2 II- ETUDE DU DISQUE

8)- Donnez la matrice d'inertie du disque (D) au point C dans b_2.

9)- Calculez le torseur cinétique du disque (D) au point C.

10)- Calculez l'énergie cinétique du disque (D).

11)- Calculez l'énergie potentielle du disque (D).

12)- Calculez le torseur dynamique du disque (D) au point C.

13)- Écrire les équations découlant du PFD pour le disque (D).

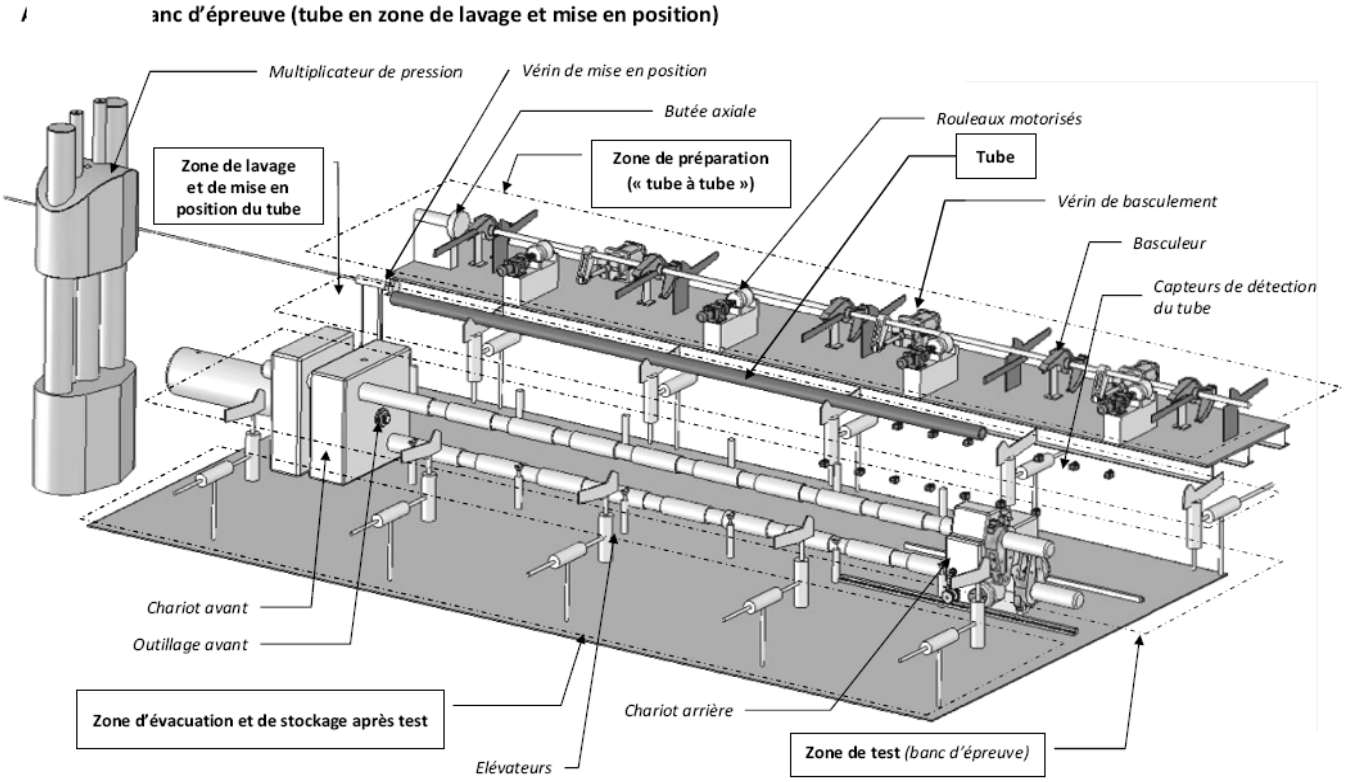
14)- Donner l'équation de roulement sans glissement de (D) sur (S).

9 Étude d'une chaîne de transmission de puissance

1 Mise en situation

Le système étudié est un banc d'épreuve permet de valider la caractéristique de tenue en pression de tubes en acier sans soudure laminés à froid, destinés à l'industrie pétrolière, nucléaire … dans des applications type canalisations pour fluides (hydrauliques, pneumatique, vapeurs) pour des pressions basses ou hautes.
Ce banc comporte 4 zones (voir schéma ci-dessous) :

- Zone de préparation tube à tester
- Zone de lavage et de mise en position
- Zone de test (objet de l'étude)
- Zone d'évacuation et de stockage après test.



La zone de test (bac d'épreuve) est essentiellement constituée d'un chariot avant et d'un chariot arrière. Chacun de ces chariots est muni de l'outillage adapté au diamètre des tubes. Avant la mise en place du tube sur le banc, le chariot arrière (objet de l'étude) est mis en position et verrouillé (à l'aide de pinces) à partir des informations « position du tube » » obtenue dans la zone précédente. La mise en position, donc le déplacement du chariot arrière en translation est généré par une chaine de transmission de puissance

comprenant un moteur rotatif lié à un réducteur à roue et vis sans fin puis à engrenages : le pignon de sortie de ce réducteur agit sur une crémaillère et permet ainsi la transformation du mouvement de rotation initial du moteur en un mouvement de translation du chariot arrière (voir annexe 1).
Le tube est alors disposé sur le banc. Le chariot avant alors se déplace (motorisation par vérin hydraulique) en plaquant le tube sur le chariot arrière : les outillages s'adaptent aux extrémités du tube pour le fermer et assurer l'étanchéité lors du test. Le tube est alors rempli d'eau en basse pression au travers du chariot avant, ce qui, par l'intermédiaire de soupapes, permet la purge d'air. Le multiplicateur de pression permet alors d'alimenter le tube en haute pression pendant toute la durée de l'épreuve. Une fois celle-ci réalisée, le tube est vidé et libéré par le recul des deux chariots pour son évacuation.

2 Étude cinématique du déplacement du chariot arrière

En « Annexe 1 » figure un schéma cinématique simplifié du système de déplacement du chariot arrière, ainsi que les grandeurs cinématiques et cinétiques nécessaires pour déterminer les caractéristiques couple-vitesse du moteur recherché.
On désigne par :

- $\mathbf{C_m}$ le couple moteur, $\boldsymbol{\omega_m}$ sa vitesse de rotation par rapport au bâti, et **V** la vitesse de translation du chariot dont la loi de vitesse est représentée en « Annexe 2 ».
- $\mathbf{t_r}$ la durée de la phase de déplacement rapide, $\mathbf{t_l}$ la durée de la phase lente, $\mathbf{t_f}$ la durée totale, $\mathbf{t_a}$ la durée de la phase d'accélération. Chaque phase de décélération dure $\mathbf{t_a/2}$
- $\mathbf{c_{rap}}$ la course de déplacement maximal (tube le plus court) à vitesse rapide (de 0 à t_r) : $\mathbf{c_{rap}}$ = 6,24 m
- $\mathbf{c_{lent}}$ la course de déplacement maximal (tube le plus court) à vitesse lente (de t_r à t_f) : $\mathbf{c_{lent}}$ = 1,56 m
- la durée maximale du déplacement total (phase rapide +lente) est limitée à 20 s
- $\mathbf{V_{rap}}$ la vitesse du chariot, lors de la phase rapide, est limitée à $\mathbf{V_{rap}} = 0{,}5\ ms^{-1}$
- **a** le module de l'accélération identique pendant toutes les phases d'accélération et de décélération.

1. Déterminer l'expression littérale de la loi entrée-sortie globale $\mathbf{i = V/\omega_m}$; montrer que $i = 1{,}23.10^{-3}\,(m)$
2. Démontrer que $\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_l}$ et $\mathbf{t_r}$ vérifient les lois suivantes : $c_{lent} = \frac{V_{rap}}{2} \cdot t_l$ et $c_{rap} = V_{rap} \cdot \left(t_r - \frac{1}{2} t_a\right)$
3. En déduire les valeurs numériques de $\mathbf{t_r}$ et de $\mathbf{t_a}$. En déduire l'accélération **a** du chariot.
4. En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur $\boldsymbol{\omega_m}$ et de son accélération angulaire $\dot{\omega}_m = \frac{d}{dt}\omega_m$ pendant les phases d'accélération et de décélération.

3 Étude dynamique du déplacement du chariot arrière

Pour la suite, on supposera un rendement global de 0,3 et une accélération angulaire

$\dot{\omega}_m = 250\ \ rad/s^2$

¿

2.1 – Ecrire l'énergie cinétique totale de l'ensemble dans son mouvement / bâti. Déterminer alors l'inertie équivalente du système ramenée sur l'arbre moteur $\mathbf{J_{eq}}$.

Pour la suite, on prendra une inertie équivalente $\mathbf{J_{eq}} = 0{,}01\ kg.m^2$

2.2 - Les efforts résistants sur le chariot arrière sont modélisés par une force constante (de direction X) **F = 500** N

Déterminer les puissances des actions mécaniques extérieures sur le système mobile.

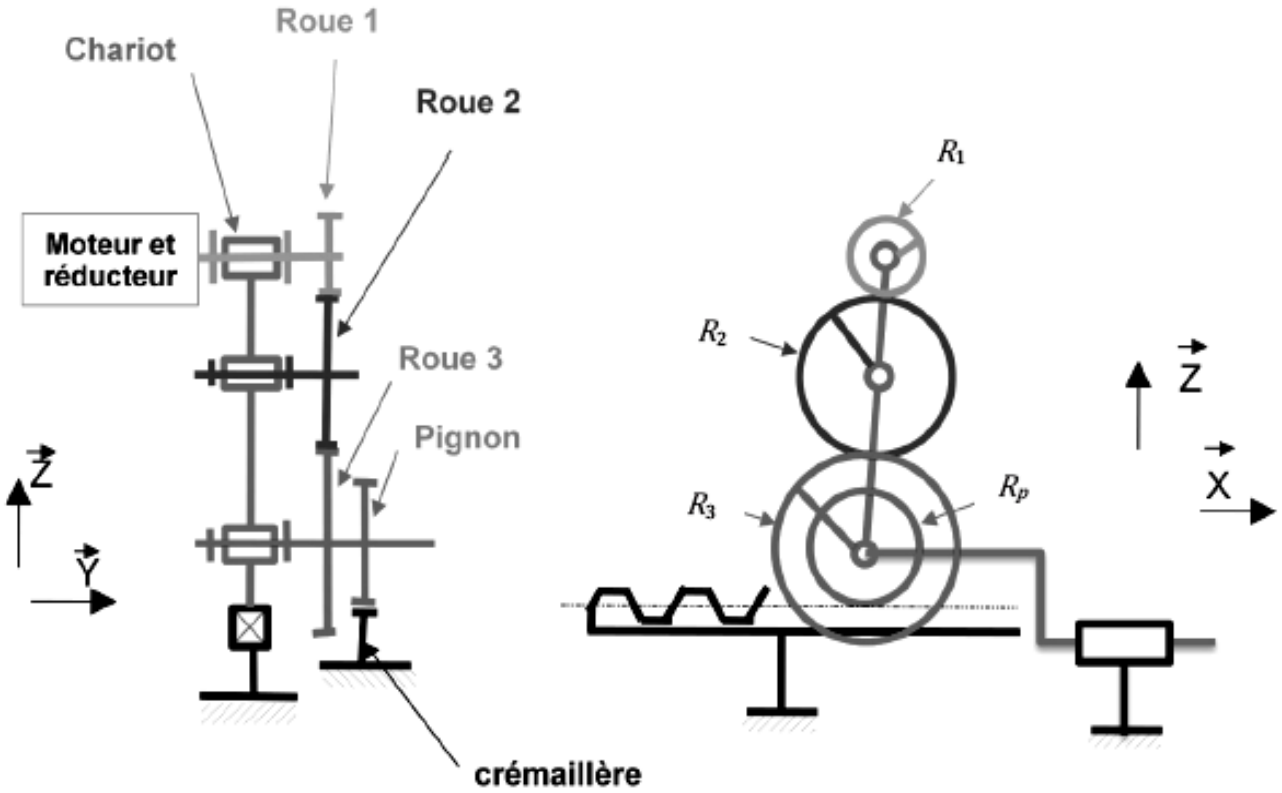
2.3 – En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer le couple moteur C_m en fonction des autres paramètres.

2.4 – Calculer alors le couple moteur pendant toutes les phases de fonctionnement (préciser la durée de chaque phase).

2.5 - Calculer le couple thermique équivalent et conclure sur le couple nominal (C_N) du moteur à choisir ainsi que sur le rapport couple max sur couple nominal admissible par ce moteur (C_{max}/C_N).

Rq : les constructeurs de moteurs préconisent de choisir un couple nominal supérieur au couple thermique équivalent : $C_{th} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} C_{mi}^2 . \Delta t_i}{T_c}}$

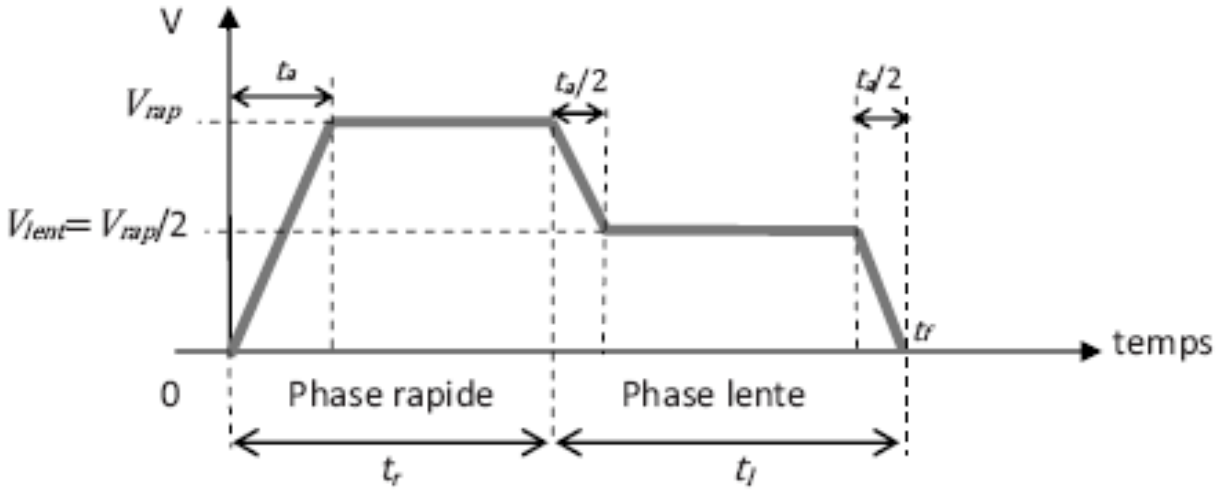
ANNEXE I



pièces	Inertie (kg.m²)	Données cinématiques
moteur	I_m = 0,0012	
Réducteur roue et vis sans fin	I_r = 0,004 (ramenée à l'arbre moteur)	Rapport de réduction r = 1/30
Roue 1	négligeable	R_1 = 50 mm
Roue 2	négligeable	R_2 = 105 mm
Roue 3 et pignon	négligeable	roue 3 : R_3 = 115 mm pignon : R_p = 85 mm

La masse totale en translation de l'ensemble Σ={chariot + moteur + réducteur + roues} est M = 2350 Kg

ANNEXE 2



Déterminer l'expression littérale de la loi entrée-sortie globale **i = V/ ω_m** ; montrer que $i = 1{,}23.10^{-3}\,(m)$

5. Démontrer que **t_a, t_l et t_r** vérifient les lois suivantes : $c_{lent} = \frac{V_{rap}}{2} \cdot t_l$ et $c_{rap} = V_{rap} \cdot (t_r - \frac{1}{2} t_a)$

6. En déduire les valeurs numériques de **t_r** et de **t_a .** En déduire l'accélération **a** du chariot.

7. En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur **ω_m** et de son accélération angulaire $\dot{\omega}_m = \frac{d}{dt} \omega_m$ pendant les phases d'accélération et de décélération.

10 Devoir de mécanique

Durée : 2h – calculatrice autorisée – tout document interdit à l'exception d'une page A4 Recto / Verso à rendre avec la copie.

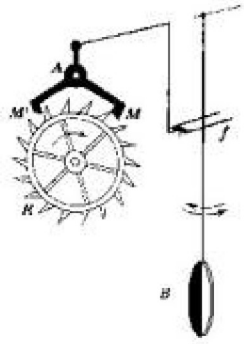
Pendule à balancier

1 Introduction

L'étude porte sur le mécanisme de balancier d'une pendule.

Les pendules mécaniques utilisent, pour le décompte du temps, un système à balancier dont la fréquence propre est réglée sur une fraction précise de seconde.

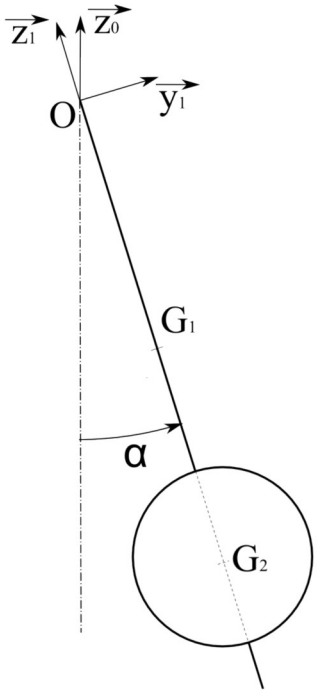
L'horloge ici étudiée est prévue pour avoir un balancier qui « bat la seconde ». (un aller / seconde)



A chaque période, les pertes d'énergies sont compensées par un apport provenant du mécanisme d'échappement du type de celui représenté ci contre. Ce mécanisme a aussi pour rôle de faire avancer les aiguilles d'une fraction de tour, par le biais d'un réducteur à engrenage. Son énergie provient de la descente progressive de poids dans le corps de l'horloge.

Un mécanisme similaire, mais utilisant des ressorts comme stockage d'énergie est utilisé pour les montres.

L'étude ne porte ici que sur le réglage du balancier, de manière à obtenir une demi période d'oscillation égale à une seconde, et sur les paramètres qui influent sur la qualité de la période obtenue.



2 Hypothèses :

- Nous ferons donc l'hypothèse d'un pendule soumis à aucun frottement
- nous ne prendrons pas en compte le mécanisme d'échappement
- Le pendule est constitué de deux solides :
  - une tige « 1 » de masse m_1 assimilée à un cylindre d'axe $\vec{z_1}$ de longueur 2L, de rayon r en liaison pivot d'axe $\vec{x_{0,1}}$ de centre O avec le bâti du mécanisme en l'une de ses extrémités. La tige est filetée sur une partie importante de sa longueur. Le centre d'inertie est situé au milieu de la tige en G_1 $\overrightarrow{OG_1} = -L\vec{z_1}$
  - Un disque « 2 » de masse m_2, de rayon R et d'épaisseur h dont le centre d'inertie est G_2 $\overrightarrow{OG_2} = -d\vec{z_1}$. La distance d est réglable par un système d'écrou et de contre écrou dont nous négligerons l'effet.
- L'accélération de la pesanteur vaut $-g\vec{z_0}$

  Les résultats vectoriels et torsoriels sont demandés en projection dans la base « 1 »

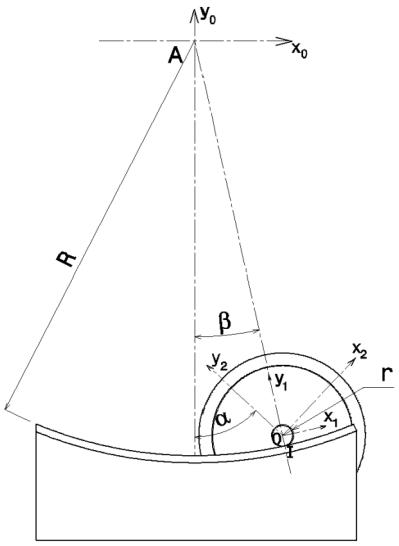
3 Questions

1. Exprimer en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées le torseur cinématique du solide « 1 » relativement au référentiel « 0 » réduit au point G_1
2. Exprimer en fonction m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées le torseur cinématique du solide « 2 » relativement au référentiel « 0 » réduit au point G_2

3. Exprimer en fonction m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées le torseur cinétique du solide « 1 » relativement au référentiel « 0 » réduit au point G_1
4. Exprimer en fonction m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées le torseur cinétique du solide « 2 » relativement au référentiel « 0 » réduit au point G_2
5. Calculer, en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées l'énergie cinétique du solide « 1 » dans son mouvement relativement au référentiel « 0 »
6. Calculer, en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées l'énergie cinétique du solide « 2 » dans son mouvement relativement au référentiel « 0 »
7. Calculer, en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, et de leurs dérivées l'énergie cinétique de l'ensemble S={1+2} dans son mouvement relativement au référentiel « 0 »
8. Calculer, en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, g et de leurs dérivées la puissance de la liaison pivot sur l'ensemble S dans son mouvement relativement au référentiel « 0 »
9. Calculer, en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, g et de leurs dérivées la puissance du poids de « 1 » dans son mouvement relativement au référentiel « 0 »
10. Calculer, en fonction de m_1, m_2, r, R, L, d, α, g et de leurs dérivées la puissance du poids de « 2 » dans son mouvement relativement au référentiel « 0 »
11. Écrire le théorème de l'énergie cinétique pour l'ensemble S = {1+2} en mouvement par rapport à « 0 »
12. En faisant l'hypothèse que l'angle α est petit, en déduire l'équation différentielle du mouvement que vous mettrez sous la forme $\ddot{\alpha}(t)+\omega^2\alpha(t)=0$ Vous donnerez l'expression de ω
13. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir $\alpha(t)$. Les conditions initiales sont $\alpha(0)=\alpha_0$ et $\dot{\alpha}(0)=0$
14. Application numérique : g = 9,81 $m\cdot s^{-2}$; r = 2,5 mm ; L = 550 mm ; m_1 = 168 g, R = 70 mm ; h = 3 mm ; m_2 = 360 g ; d = 1000 mm. Calculer la valeur de ω . En déduire celle de T
15. Calculer la longueur d nécessaire pour que la période d'oscillation fasse exactement deux seconde
16. Nous supposons que l'horloge a été réglée à 20° avec la longueur d trouvée en question 15. Sachant que la tige « 1 » est en acier, en supposant que la température descende à 0°, quelle est alors la nouvelle période d'oscillation. Le coefficient de dilatation de l'acier est de 12 $\mu m\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$. Vous ne tiendrez compte que de la modification de la longueur d.
17. L'horloge avance (ou retarde) de combien de secondes par 24 h dans ces conditions ?

11 Volant sur piste circulaire

L'étude porte sur le système représenté en annexe, composé d'une piste circulaire de rayon R supposée galiléenne sur laquelle roule sans glisser autour un volant d'inertie d'axe z, de masse m_1, de centre d'inertie O et de moment d'inertie I_{OZ} = J.



extrait du plan du système

1 Partie 1 : Déterminer la valeur de J à l'aide de l'étude du mouvement

1. Le problème peut il être considéré comme plan ? Justifier votre réponse (/1)
2. Écrire la condition de roulement sans glissement en I. En déduire une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ en fonction des données littérales de l'énoncé. (/1)
3. Calculer le torseur cinématique du volant relativement au référentiel « 0 », exprimé au point O, en projection dans la base « 1 » en fonction des données littérales de l'énoncé (/2)
4. Calculer le torseur cinétique du volant, relativement au référentiel « 0 », exprimé au point O, en projection dans la base « 1 » en fonction des données littérales de l'énoncé.(/2)

   La piste exerce sur le volant le torseur suivant : $\{I(piste \rightarrow volant)\} = \begin{Bmatrix} X_I & 0 \\ Y_I & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I,R_1}$
5. Sachant que $\vec{g} = -g\,\vec{y_0}$ calculer le torseur des efforts liés au poids du volant, au point O dans la base « 1 » en fonction des données littérales de l'énoncé. (/1)
6. Calculer l'énergie cinétique du volant, relativement au référentiel « 0 », en fonction des données littérales de l'énoncé. Vous ferez disparaître l'angle α en vous servant de l'équation trouvée en question 2 (/3)

Choisir un parcours (A ou B) et ne traiter que les questions correspondantes

Parcours A : équation du mouvement par l'énergétique

7. Calculer la puissance de l'action de liaison en I dans le mouvement du volant par rapport à la piste (/2)
8. Calculer la puissance de l'action du poids du volant dans son mouvement par rapport à la piste (/2)
9. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique déterminer l'équation différentielle du mouvement (/2)

Parcours B : Dynamique

7. Calculer le torseur dynamique du volant dans son mouvement par rapport à la piste (/2)
8. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur le volant – Appliquer le PFD au volant, point de réduction : I, base « 1 » (/2)
9. Résoudre le PFD de manière à obtenir l'équation différentielle du mouvement (/2)

Bonus : à ne traiter qu'en fin de devoir, après avoir traité la seconde partie.

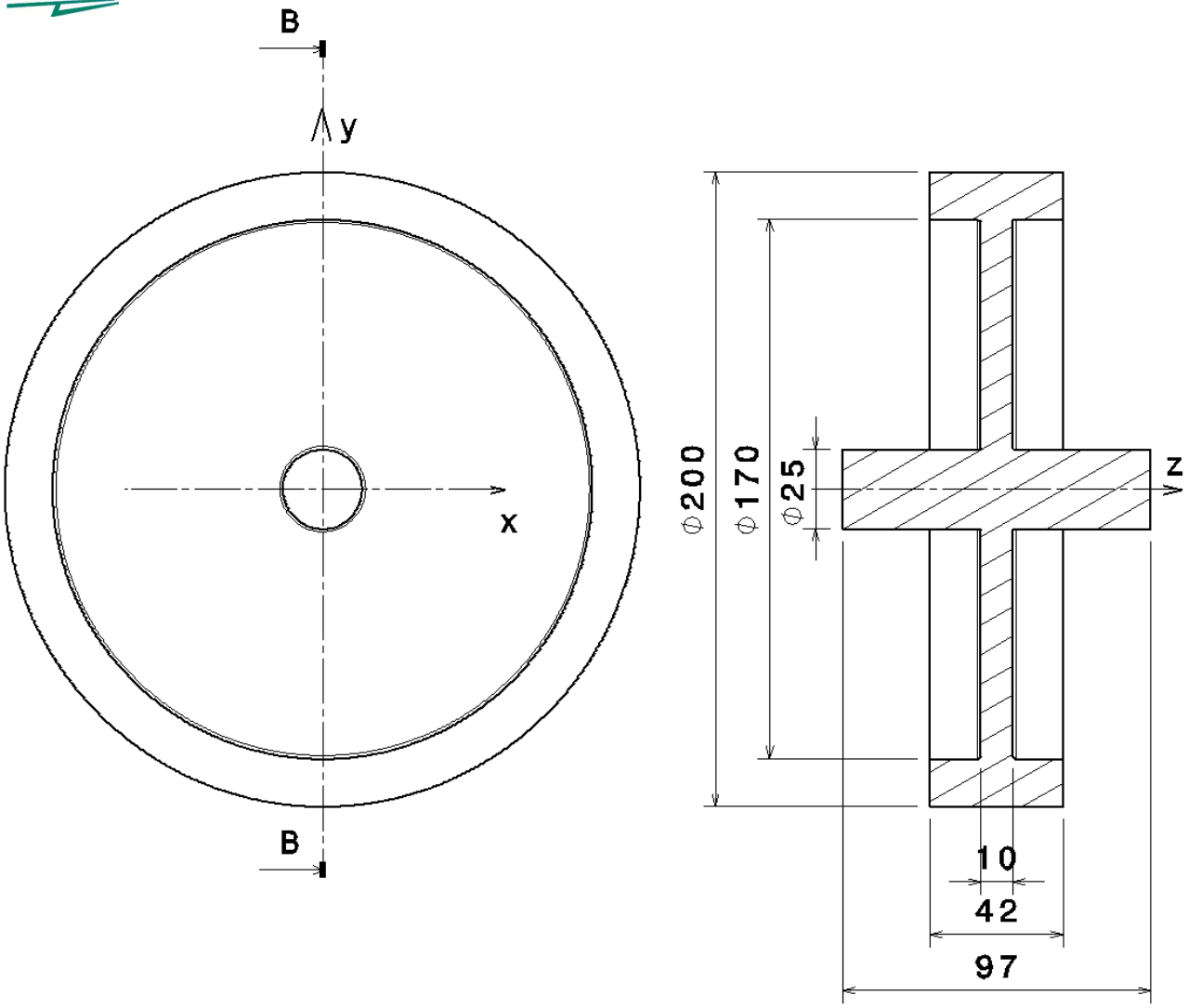
10. A partir de l'équation différentielle du mouvement, calculer la période d'oscillation du volant sur la piste circulaire. (/1)
11. En déduire la valeur de J en fonction de la période d'oscillation et des autres données de l'énoncé (/2)

2 Partie 2 : Équilibrage du volant d'inertie (/7)

Du fait de défauts de fabrication, le volant d'inertie n'est pas parfaitement équilibré. Les mesures obtenues sur ce volant donnent :

masse : 5 kg ; Position du centre d'inertie : $\overrightarrow{OG} = (12{,}385\,;0\,;0{,}016)$ (mm) ; I_{OX} = 0,016 ; I_{OY} = 0,016 ; I_{OZ} = 0,032 ; P_{OXY} = 0 ; $P_{OXZ} = -8{,}276\cdot10^{-6}$; P_{OYZ} = 0 (kg m²) soit $I(O,volant) = \begin{Bmatrix} 0{,}017 & 0 & 8{,}276\cdot10^{-6} \\ 0 & 0{,}017 & 0 \\ 8{,}276\cdot10^{-6} & 0 & 0{,}032 \end{Bmatrix}$ (kg m²)

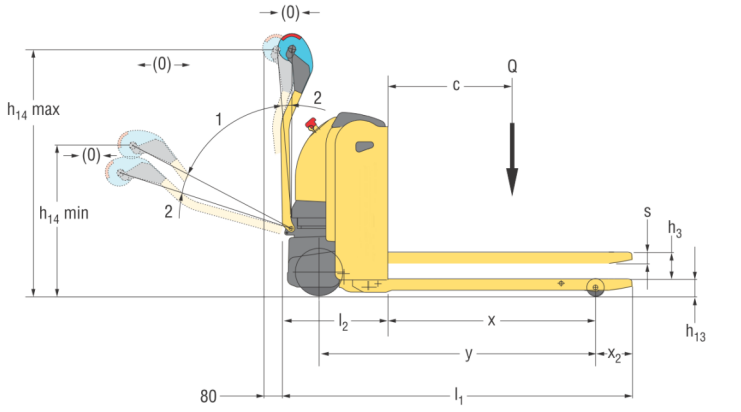
1. Étant donné les éléments d'inertie ci dessus, dans quel plan doivent se situer les masselottes d'équilibrage ?
2. On suppose un équilibrage avec une seule masselotte, par enlèvement de matière (perçage) sur un rayon de 93,5 mm
   1. Écrire la condition d'équilibrage statique
   2. Écrire la condition d'équilibrage dynamique
   3. Calculer alors la masse à enlever, et la position suivant z du centre de masses
3. En déduire les dimensions du trou à effectuer. Situer le perçage sur le dessin ci dessous (matériau : acier, masse volumique 7860 kg/m^3)

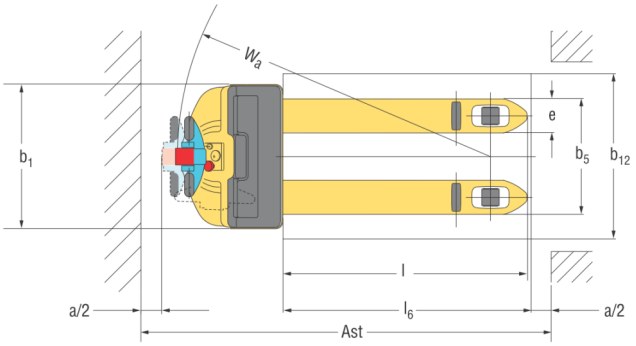


12 Chaîne de puissance d'un chariot transpalettes

Le dessin d'ensemble proposé, représente le montage d'une roue motrice et directrice d'un chariot d'atelier.
La pièce (16) (bague extérieure) est en liaison complète avec le châssis du chariot. L'ensemble des autres pièces représentées a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O,\vec{z})$ par rapport au châssis du chariot: on assure ainsi la fonction directrice de la roue.
La fonction motrice de la roue est remplie par un moteur: la chaîne cinématique moteur-roue est réalisée par engrenages.
Pour ne pas compliquer la lecture du dessin d'ensemble, on s'est restreint pour la pièce (1) à ne figurer que ceux des pointillés qui sont indispensables à la compréhension des formes. De même certaines intersections de surfaces n'ont pas été tracées.

1. *A partir des données ci contre et des données du dessin d'ensemble donné en annexe, calculer les rapports de transmission suivants :*
   $k_1=\frac{\omega_{14}}{\omega_{15}}$; $k_2=\frac{\omega_{12}}{\omega_{14}}$; $k_3=\frac{\omega_{11}}{\omega_{12}}$; $k_4=\frac{V_{chariot}}{\omega_{11}}$.
   En déduire $k=\frac{V_{chariot}}{\omega_{moteur}}$
2. *Etude de statique : Calculer l'effort tangentiel appliqué sur la roue motrice dans les deux cas extrêmes proposés :*
   1. *Chariot à vide et pente de 20%*
   2. *Chariot en charge et pente de 10%*
3. *En fonction de la charge appliquée sur l'essieu avant en déduire le coefficient de frottement minimal de la roue sur le sol*
4. *Calculer dans les deux cas proposés en question 2 le couple moteur nécessaire au franchissement de la pente indiquée*



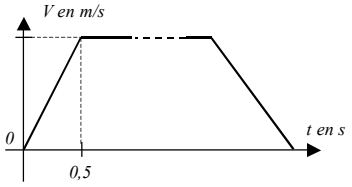


Ast = $W_a + l_6 - x + a$

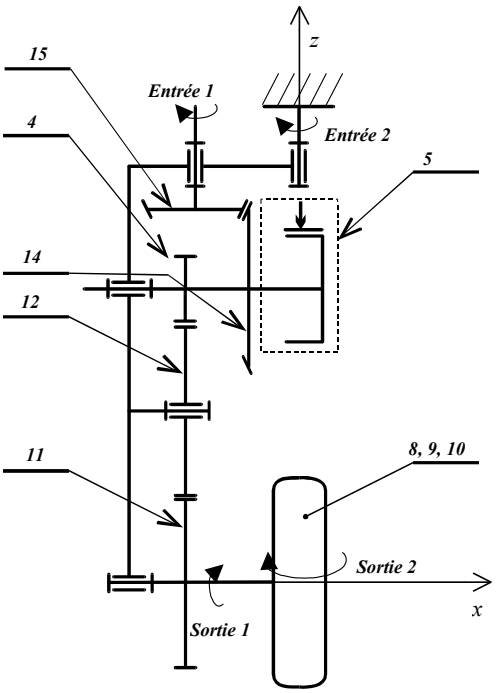
a = 200 mm

Capacité de charge	Q (kg)	1 600		
Centre de charge	c (mm)	600		
Porte à faux	x (mm)	1 001		
Empattement	y (mm)	1 331		
Poids à vide	kg	396		
Charge par essieu en charge, avant/arrière	kg	699	1 297	
Charge par essieu à vide, avant/arrière	kg	307	89	
Hauteur de levage	h_3 (mm)	130		
Hauteur timon en position de marche min./max.	h_{14} (mm)	735	1 200	
Hauteur fourches abaissées	h_{13} (mm)	85		
Longueur hors tout	l_1 (mm)	1 683		
Longueur jusqu'à la face avant des fourches ❖	l_2 (mm)	500		
Largeur hors tout	b_1/b_2 (mm)	700		
Dimensions des fourches	e (mm)	55	170	1 180
Ecartement extérieur des fourches	b_5 (mm)	560		
Garde au sol au milieu de l'empattement	m_2 (mm)	20		
Largeur d'allée avec palette 1 000 mm x 1 200 mm de large ❖	Ast (mm)	1 711		
Largeur d'allée avec palette 800 mm x 1 200 mm de long ❖	Ast (mm)	1 911		
Rayon de giration ❖	W_a (mm)	1 512		
Vitesse de déplacement en charge/à vide	km/h	5,5	6,0	
Vitesse de levée en charge/à vide	m/s	0,032	0,046	
Vitesse de descente en charge/à vide	m/s	0,08	0,08	
Maximum performances en rampe en charge/à vide	%	10	20	
Frein de service		Electromagnétique		
Moteur de traction, puissance (S2 60 min)	kW	0,8		
Moteur de levage, puissance (S3 15%)	kW	1 □		
Dimensions des roues, avant	(mm)	Ø 230 x 75		
Dimensions des roues, arrière	(mm)	Ø 85 x 114		

5. *Sachant que le moment d'inertie du moteur est $J_m = 0{,}001\, kg \cdot m^2$, que le moment d'inertie du tambour de freinage (ensembles de pièces 14 du schéma cinématique) est $J_f = 0{,}002\, kg \cdot m^2$ et que les moments d'inertie du pignon 12 et de la roue motrice sont considérés comme négligeables, déterminer, pour les deux cas ci dessous le couple moteur nécessaire pendant la phase de démarrage.*

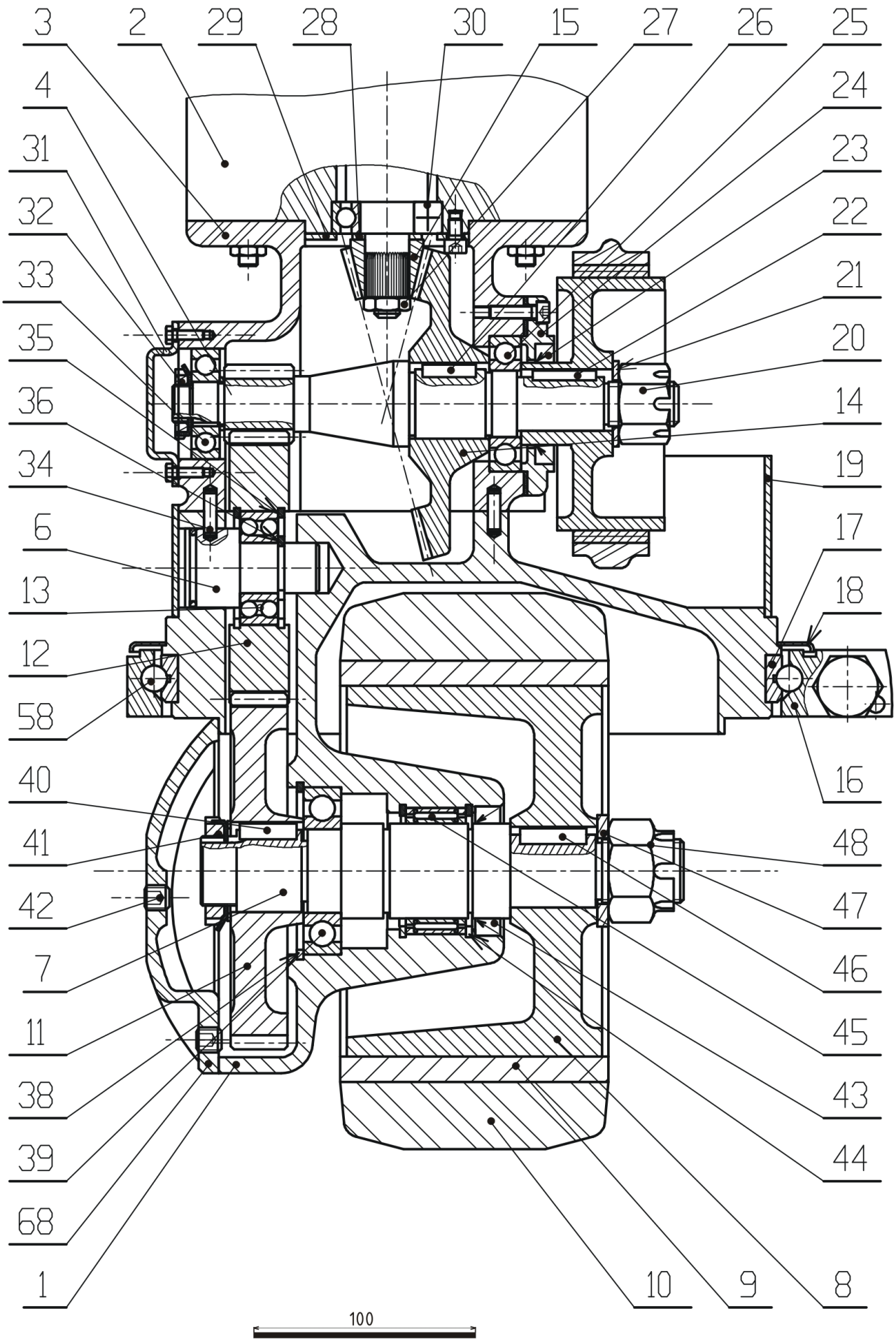


   1. *Cas 1 : à vide, sur sol horizontal*
   2. *Cas 2 : en charge, sur sol horizontal*
6. *Quelle est l'influence des inerties des pièces en rotation relativement aux charges ?*
7. *Comparer les deux couples trouvés précédemment aux résultats de la question 4. Lequel est le couple dimensionnant ?*
8. *Quel serait le couple nécessaire pour démarrer le système dans le cas d'un démarrage en rampe maximal, en respectant la courbe de vitesse donnée ci dessus*
   1. *à vide*
   2. *en charge*



Rep	Nb	Désignation	Matière	Obs.
69	4	Vis H 6-12/10 *(non dessinée)*		
68	1	Chapeau	AS9G	
67	2	Ecrou Hm 5 (*non dessinée)*		
66	1	Tige de réglage *(non dessinée)*		
65	2	Plaquette de frein *(non dessinée)*	Ferrodo	
64	1	Rondelle *(non dessinée)*		
63	2	Goupille V 2-14 *(non dessinée)*		
62	1	Rondelle *(non dessinée)*		
61	1	Ressort *(non dessinée)*	XC65f	
60	1	Rondelle d'appui *(non dessinée)*	E24	
59	2	Mâchoire de frein *(non dessinée)*	Fonte	
58	37	Bille	100C6	
57	1	Vis de réglage sans tête fendue ϕ 3	XC38	
56	1	Rondelle		
55	1	Ecrou H 10		
54	1	Vis de serrage H 10-50/20		
53	1	Goupille V 3,2-22		
52	4	Ecrou H 7		
51	4	Goujon M 7-35/10-15		
50	4	Goujon M 4-25/8-12		
49	4	Ecrou H 4		
48	1	Ecrou HK M28		
47	1	Rondelle d'appui	E24	
46	1	Clavette		
45	1	Roulement à aiguilles		
44	1	Anneau élatique		
43	1	Joint à lèvre		
42	1	Bouchon		
41	1	Ecrou à encoches KM 17		
40	1	Clavette		
39	1	Roulements à billes		16004
38	1	Anneau élastique		
37	4	Rondelle d'arrêt (Grower)		
36	1	Anneau élastique		
35	2	Anneau élastique		

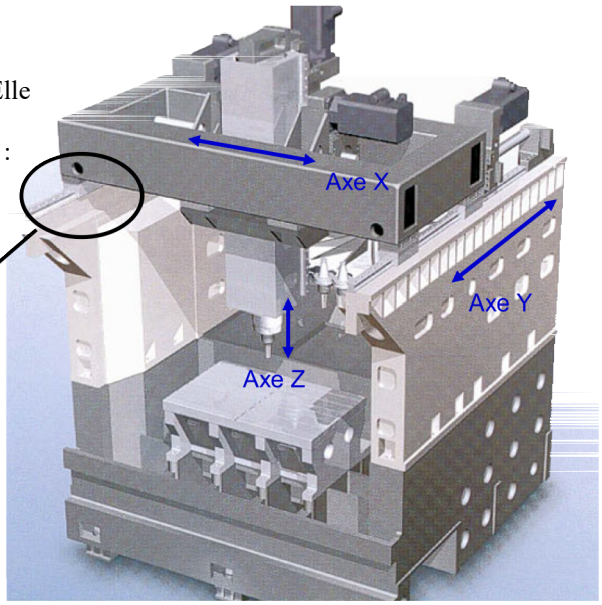
Rep	Nb	Désignation	Matière	Obs.
34	2	Pieds de centrage	Stub	
33	1	Roulement à billes		6000
32	1	Ecrou à encoches		
31	1	Chapeau protecteur	Tôle	
30	1	Roulements à billes		6001
29	1	Rondelle d'appui	E24	
28	1	Rondelle de réglage de (*15*)	E24	
27	1	Ecrou H 7		
26	1	Clavette		
25	1	Roulement à Billes		6002
24	1	Chapeau	E36	
23	1	Joint à lèvre		
22	1	Clavette		
21	2	Rondelle Belleville		
20	1	Ecrou HK M8		
19	1	Protecteur	Tube	
18	1	Chapeau serti	Tôle	1 mm
17	1	Bague intérieure	XC65f	liée à 1
16	1	Bague extérieure	XC65f	fixe
15	1	Pignon moteur (conique)	16NC16	$k_{15/14}$ =4
14	1	Roue intermédiaire (conique)	16NC16	
13	1	Roulement à billes		6202
12	1	Pignon intermédiaire	16NC16	Z_{12} = 62
11	1	Pignon de roue	16NC16	Z_{11} = 82
10	1	Bandage de roue	Poly/Vulkollan	
9	1	Jante		
8	1	Roue	XC30	
7	1	Arbre de roue	16NC6	
6	1	Arbre intermédiaire	16NC6	
5	1	Poulie frein	E24	
4	1	Pignon arbré	16NC6	Z_4 = 16
3	1	Carter supérieur	AS9G	
2	1	Moteur		
1	1	Carter inférieur	AS9G	


3
2
29
28
30
15
27
26
25
4
24
31
23
32
22
33
21
35
20
36
14
34
19
6
17
13
18
12
58
16
40
41
48
42
47
7
46
11
45
38
43
39
44
68
1
10
9
8
100

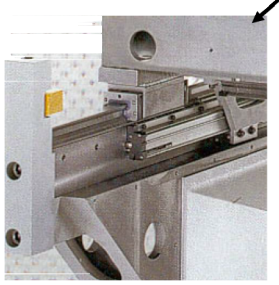
13 Étude de la chaîne cinématique de l'axe Z d'une machine outil à commande numérique.

1 Présentation du système

La machine DMC 65V est une machine outil UGV à commande numérique. Elle est dotée de 3 axes de déplacement nommés X, Y et Z.
Pour chaque axe la cinématique de transmission du mouvement est constituée :
• D'un ou deux moteurs brushless,
• D'un étage de réduction par poulie et courroie synchrones,
• D'un système de transformation de mouvement (système vis écrou à billes).

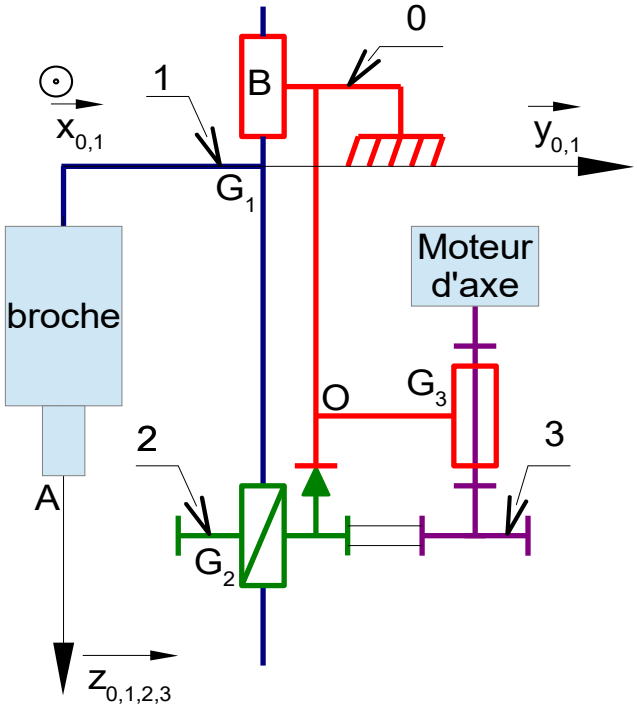


Le plan A4 (ci-joint en annexe) représente la chaîne cinématique de l'axe vertical Z, les éléments de guidage en translation ne sont pas représentés.



2 Données

- Intensité de l'effort axial de la pièce sur l'outil : Fa (N), suivant $-\vec{z}_1$
- Masse du mobile : m
- Pas du système vis écrou : p (m)
- Inertie du sous ensemble (rotor moteur + poulie) autour de son axe : J_3 (kg·m²).
- Vitesse de rotation du moteur d'axe : $\omega_m=\omega_3=\frac{d\alpha}{dt}$ avec $\alpha=(\vec{x}_0;\vec{x}_3)=(\vec{y}_0;\vec{y}_3)$ (rad/s)
- Couple fourni par le moteur d'axe : C_m
- Inertie du sous ensemble 2 autour de son axe de révolution : J_2
- on note k le rapport des rayons entre la poulie de l'écrou « 2 » et de la poulie motrice « 3 » : $k=\frac{r_2}{r_3}$
- Vitesse de rotation du sous ensemble 2 par rapport au bâti de la machine: $\omega_2=\frac{d\beta}{dt}$ avec $\beta=(\vec{x}_0;\vec{x}_2)=(\vec{y}_0;\vec{y}_2)$
- Rendement global du système η
- Accélération de la pesanteur : g = 10 m·s^{-2} $\vec{g}=g\vec{z}_0$
- $\overrightarrow{OA}=-a\vec{y}_0+z(t)\vec{z}_0$ $\overrightarrow{AG_1}=a\vec{y}_0-b\vec{z}_1$ $\overrightarrow{OG_2}=\vec{0}$
  $\overrightarrow{OG_3}=c\vec{y}_0-d\vec{z}_0$ $\overrightarrow{OB}=-e\vec{z}_1$



3 Questions

Le but est de dimensionner le moteur dans un cas typique d'usinage.

1 Dessiner les schémas plans paramétrés permettant de passer du repère « 0 » au repère « 2 » et du repère « 0 » au repère « 3 ». En déduire $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$

2 On note $i_{23}=\frac{\omega_2}{\omega_3}$ exprimer i_{23} en fonction des données du problème.

3 On note $i_{12}=\frac{\overrightarrow{V(G_1/R_0)}\cdot\vec{z}_0}{\omega_2}$. exprimer i_{12} en fonction des données du problème.

4 Tracer le graphe des liaisons du mécanisme

5 Expression de l'énergie cinétique et inertie équivalente

Exprimer l'énergie cinétique du solide 3 dans son mouvement par rapport à 0, en fonction de ω_m et des données du problème

6 Exprimer l'énergie cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport à 0, en fonction de ω_m et des données du problème

7 Exprimer l'énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à 0, en fonction de ω_m et des données du problème

8 En déduire l'inertie équivalente de l'ensemble de l'axe, J_{eq}, ramenée sur l'arbre moteur

9 Exprimer les puissances des efforts extérieurs exercées sur l'ensemble $1\cup2\cup3$ dans le mouvement de $1\cup2\cup3$ par rapport au bâti. Note : Dans l'expression des puissances, la vitesse du mobile « 1 » sera remplacée par son expression en fonction de ω_m

10 Exprimer la puissance de l'action mécanique exercée par le forêt sur l'axe de la broche en A dans le mouvement de 1 par rapport à 0

11 Exprimer la puissance du poids de 1 dans son mouvement par rapport à 0

12 Exprimer la puissance du moteur

13 Exprimer les puissances des actions mutuelles entre les solides de l'ensemble $1\cup2\cup3$.

14 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $1\cup2\cup3$.
en déduire, en intégrant le rendement du système, $C_m=f(F_a,m,g,J_2,J_3,k,p,\eta,\omega_m(t)\text{et ses dérivées})$

15 Application numérique

- m= 320 kg
- p=30 mm/tr
- J_3 = 0,0048 kg·m²
- J_2 = 0,023 kg·m²
- k=2,25
- Accélération/décélération du mobile : $\ddot{z}=\pm\ 2 m.s^{-2}$
- en phase de perçage la force de perçage est de 5100 N suivant $-\vec{z}_0$
- η = 0,7

16 Compléter le tableau et tracer le graphe du couple moteur sur un cycle avec les données suivantes (répondre sur la copie) :

17 Ajouter sur le graphe ci dessous la courbe du couple moteur en fonction du temps (indiquer l'échelle des valeurs sur la partie droite de la courbe

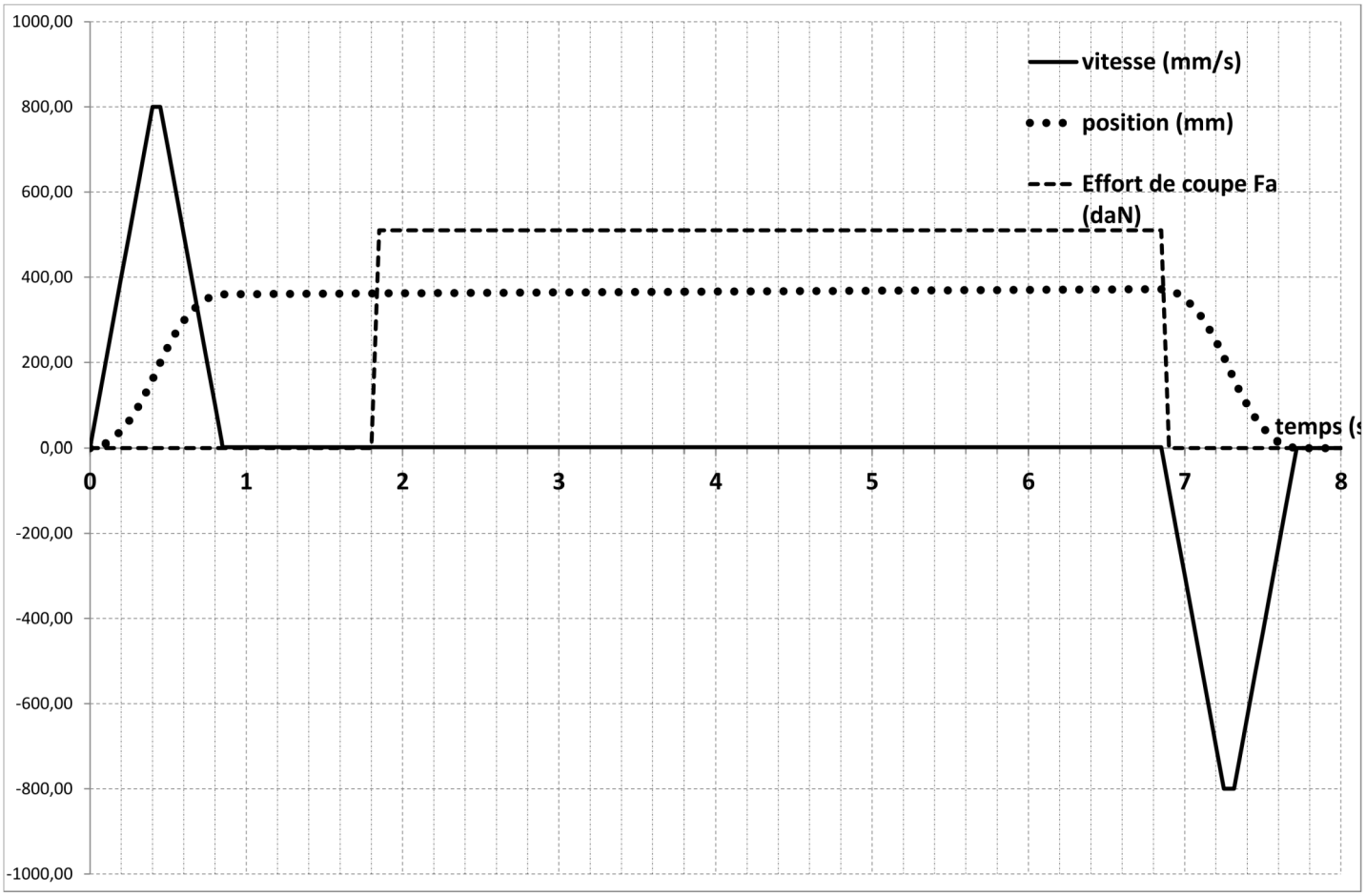
18 Calculer le couple thermique équivalent, et, en fonction des valeurs numériques que vous avez trouvé, choisir le moteur le mieux adapté dans le document ci dessous. Vous justifierez votre choix.

Rappel $C_{Theq} = \sqrt{\frac{\sum_i C_i^2 \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}}$ avec C_i couple appliqué par le moteur pendant le temps Δt_i. Le dénominateur correspond au temps de cycle total.

Le couple thermique équivalent doit être inférieur au couple nominal, le couple maximal et la fréquence maximale doivent être respectées.

Phase du cycle	temps (s)	durée de la phase (s)	accélération (m/s²)	vitesse (m/s)	vitesse (mm/s)	position (mm)	Effort de coupe (N)	Vitesse de rotation du moteur (rad/s)	Accélération angulaire moteur (rad/s²)	Couple moteur (Nm)	Cm²·Δt
accélération avance rapide	0,00	0,40	2	0,000	0,00	0,00	0				
avance rapide	0,40	0,05	0	0,800	800,00	160,00	0				
décélération avance rapide	0,45	0,40	-2	0,800	800,00	200,00	0				
pièce + 2 mm	0,85	1,00	0	0,002	2,00	360,00	0				
usinage	1,85	5,00	0	0,002	2,00	362,00	5100				
accélération retour rapide	6,85	0,40	-2	0,000	2,00	372,00	0				
retour rapide	7,25	0,07	0	-0,800	-800,00	212,00	0				
décélération retour rapide	7,32	0,40	2	-0,800	-800,00	160,00	0				
fin de cycle	7,72	0,28	0	0,000	0,00	0,00	0				

Cm

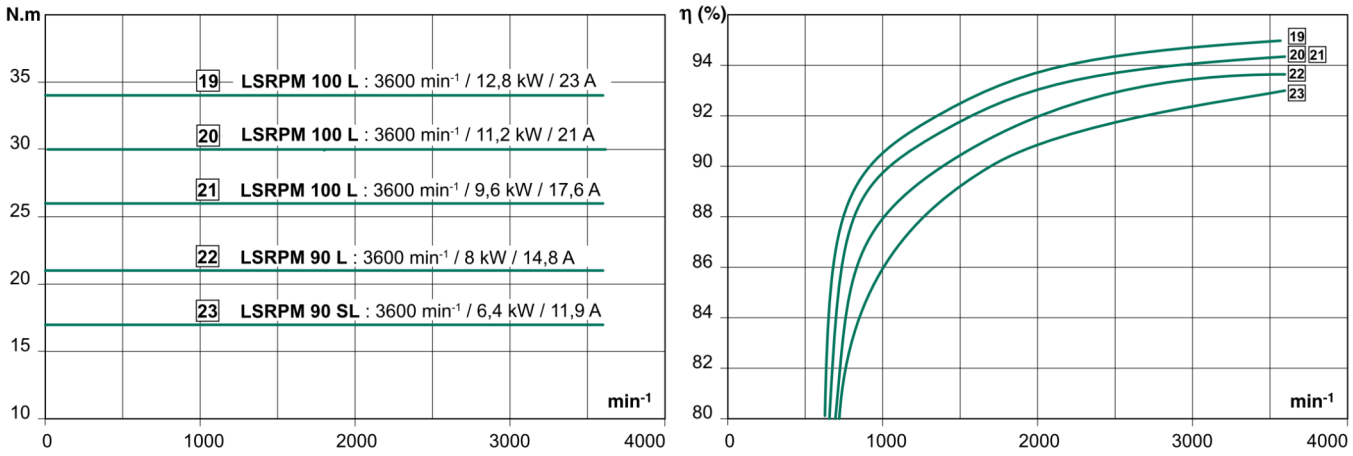


Gamme 3600

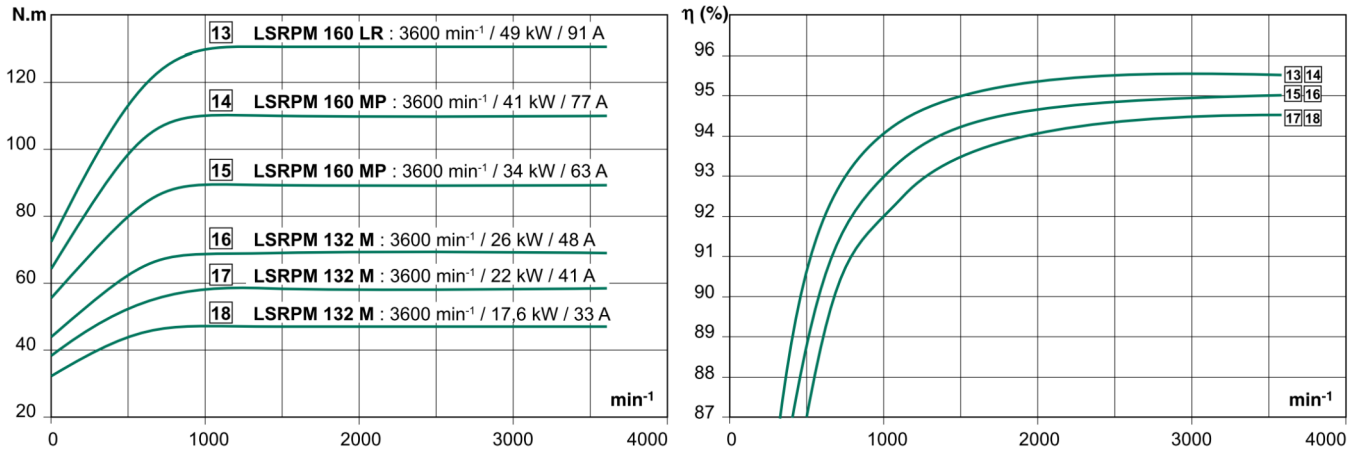
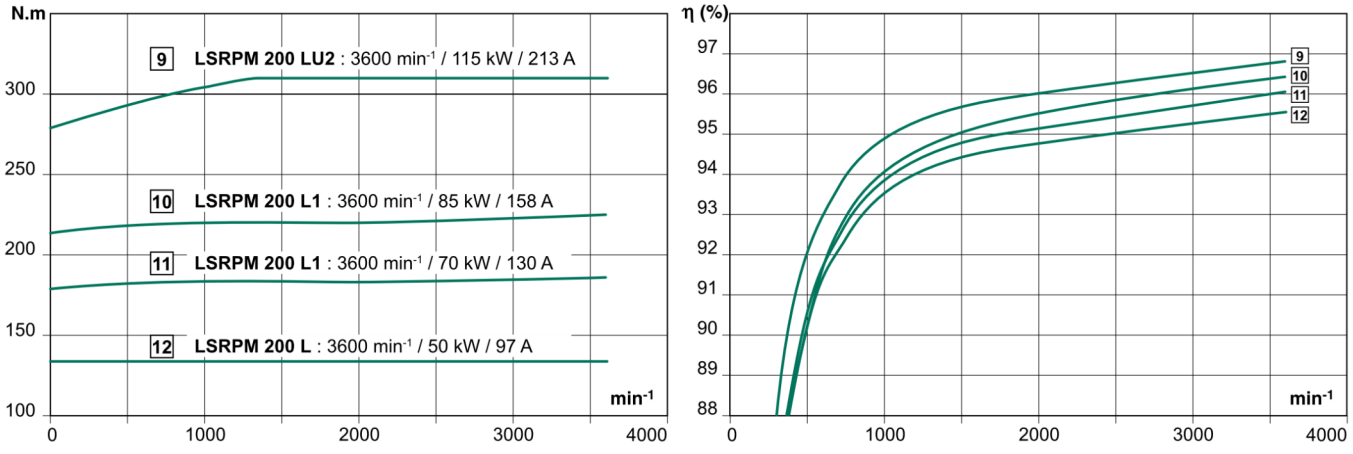
MOTOVARIATEURS DYNEO®
Variateurs de vitesse Unidrive SP / Moteurs synchrones à aimants LSRPM-PLSRPM
Performances

Gamme 3600 - De 0 à 3600 min^{-1}

Couple de 0 à 34 N.m



Couple de 34 à 130 N.m



Couple de 130 à 305 N.m