

Étude d'un compresseur d'air

Le système étudié est un compresseur d'air représenté en annexes (source : site de J. Lappare)

1. Chercher les classes d'équivalence de ce mécanisme

Classe d'équivalence (nom)	Numéros de pièces de la classe d'équivalence
1 : Bâti	

2. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme

3. Proposer un schéma cinématique spatial de ce mécanisme.

4. Combien de mobilité souhaite on obtenir pour ce mécanisme. Justifier

5. Quel est alors le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme. Justifier.

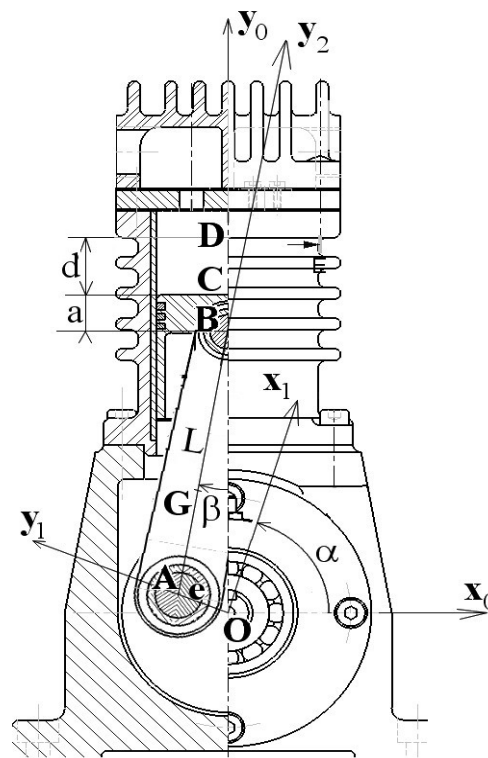
6. Proposer un schéma cinématique plan de ce mécanisme dans le plan $x-y$ (voir fig ci contre)

7. En se basant sur le schéma ci dessous et sur les données associées, Exprimer la relation entre l'angle α et la position du piston d , en fonction de L et de e sachant que $d=0$ lorsque $\alpha = 0^\circ$. Vous donnerez aussi la relation entre α et β

note $\vec{OA} = e \vec{y}_1$, $\vec{AB} = L \vec{y}_2$, $\vec{AG} = h \vec{y}_2$, $\vec{BC} = a \vec{y}_0$
 $\vec{CD} = d(t) \vec{y}_0$ $\vec{DO} = -(a+L+e) \vec{y}_0$

Soit

- R_0 le référentiel $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti, la base « 0 » étant la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- R_1 le référentiel $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ lié au vilebrequin, la base « 1 » étant la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- R_2 le référentiel $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{0,1,2})$ lié à la bielle, la base « 2 » étant la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

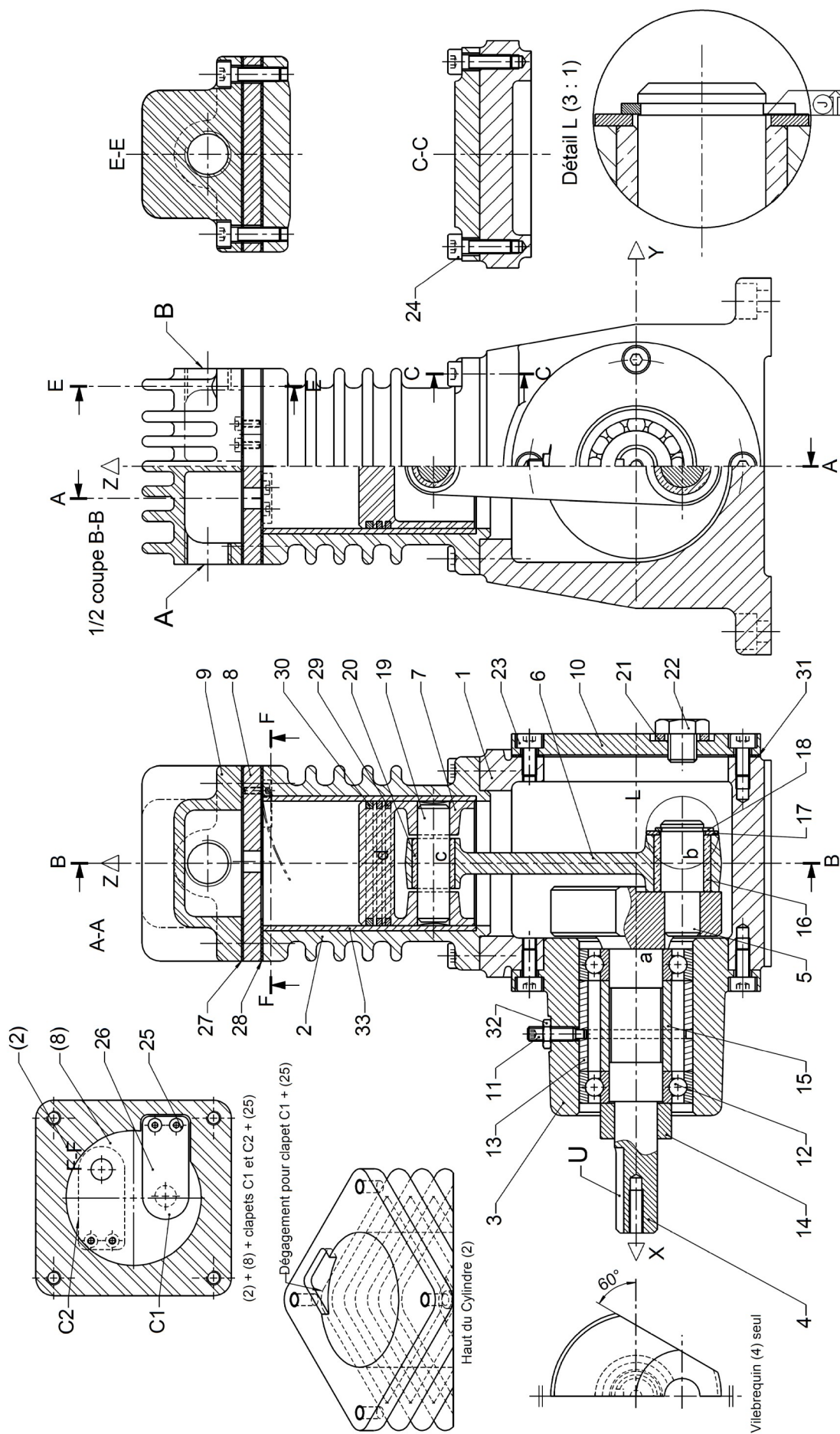


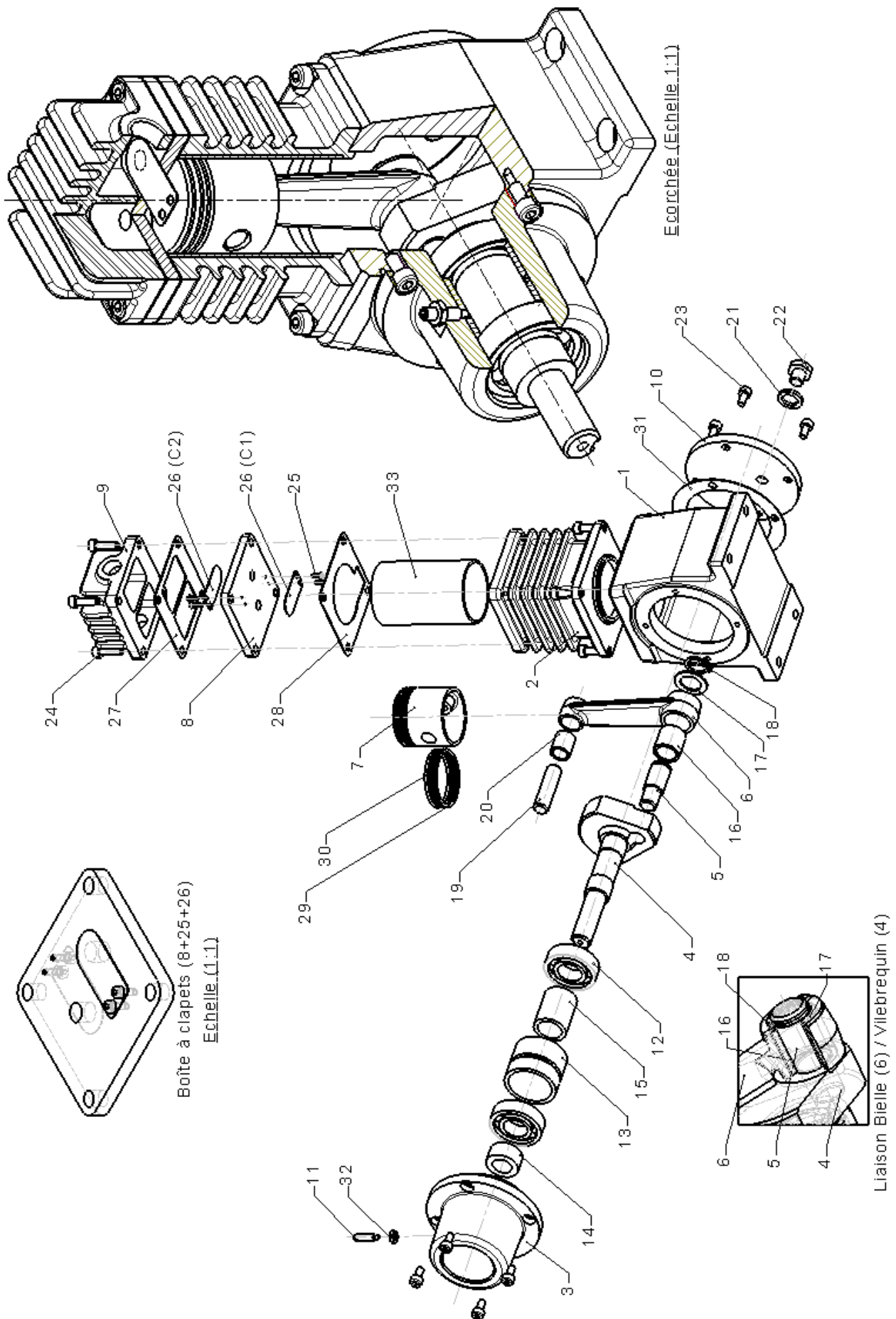
8. Faire les schémas plan paramétrés permettant de passer de R_0 à R_1 et de R_0 à R_2 . En déduire les vecteurs taux de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$

9. calculer la vitesse du point A relativement au référentiel R_0 en fonction de α et ses de ses dérivées, et des dimensions des pièces du mécanisme. Le résultat sera exprimé dans la base « 1 »

10. Calculer la vitesse du point B relativement au référentiel R_0 en fonction de $d(t)$ et des dimensions des pièces du mécanisme. Le résultat sera exprimé dans la base « 0 »
11. Calculer l'accélération du point A relativement au référentiel R_0 . L'exprimer en fonction de e , L , α et ses dérivées. Le résultat sera exprimé dans la base « 1 »
12. Écrire le torseur cinématique du vilebrequin relativement au référentiel R_0 réduit au point O
13. Écrire le torseur cinématique de la bielle, relativement au référentiel R_0 réduit au point A. Le résultat sera exprimé en base « 1 »
14. En utilisant le torseur précédent, calculer la vitesse du point G relativement à R_0 . (G est le centre d'inertie de la bielle), en fonction de α , β , e , L . Ne pas chercher à projeter le résultat dans une base particulière, conserver les vecteurs unitaires de différentes bases dans vos résultats.
15. En utilisant la relation du champ des vecteurs accélération, calculer l'accélération du point G relativement à R_0 . Ne pas chercher à projeter le résultat dans une base particulière, conserver les vecteurs

unitaires de différentes bases dans vos résultats.





Étude d'une scie sauteuse

Le système étudié est une scie sauteuse représentée en annexes (source : eduscol STI)

Consignes

Le principe du mécanisme de transformation de mouvements est représenté sur la Figure 1.

Le paramétrage sera repris sur cette figure.

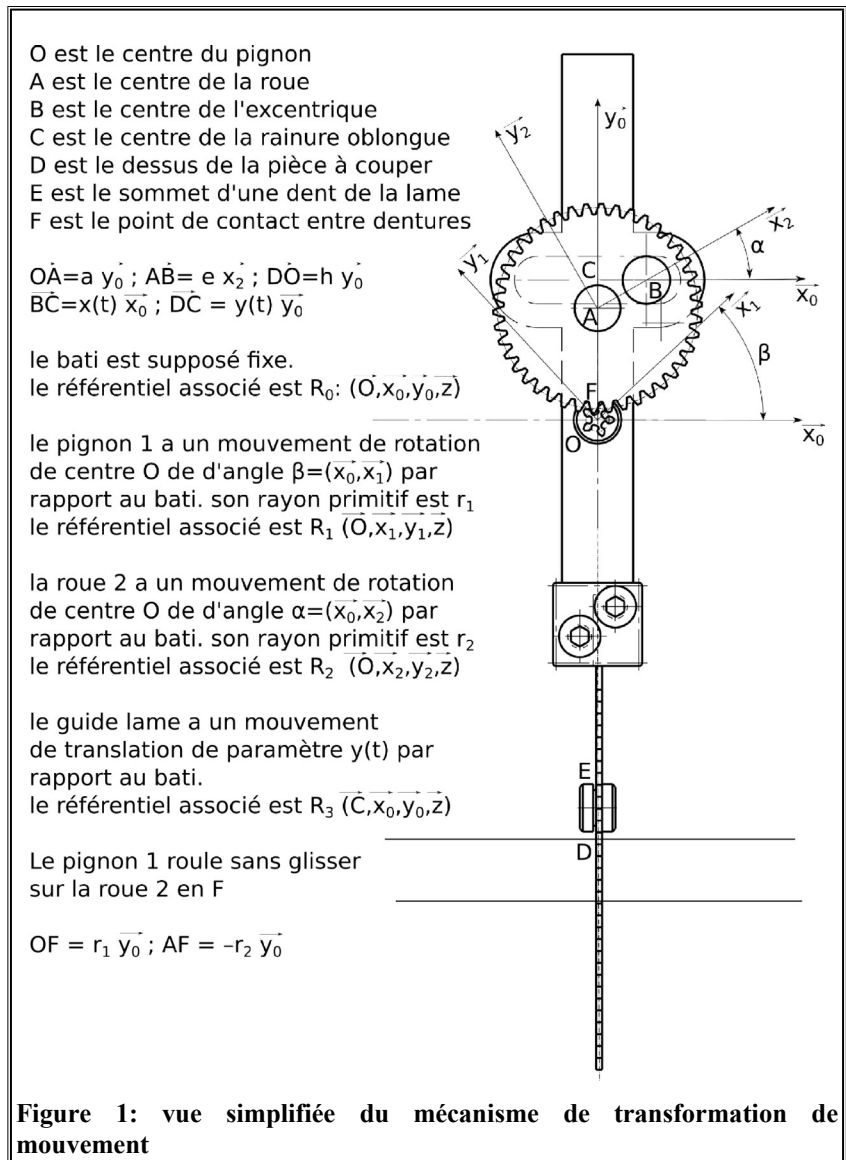
Sauf mention contraire, les calculs seront effectués de manière littérale.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Faire toutes les hypothèses nécessaires pour compléter les données qui vous sembleraient manquantes, en les expliquant clairement.

Partie 1 : modélisation

1. Chercher les classes d'équivalence de ce mécanisme en remplissant le tableau ci-dessous. Donner un nom à chaque classe d'équivalence (1 point)



Classe d'équivalence (nom)	Numéros de pièces de la classe d'équivalence
0 : Bâti	

2. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme

(1 point)

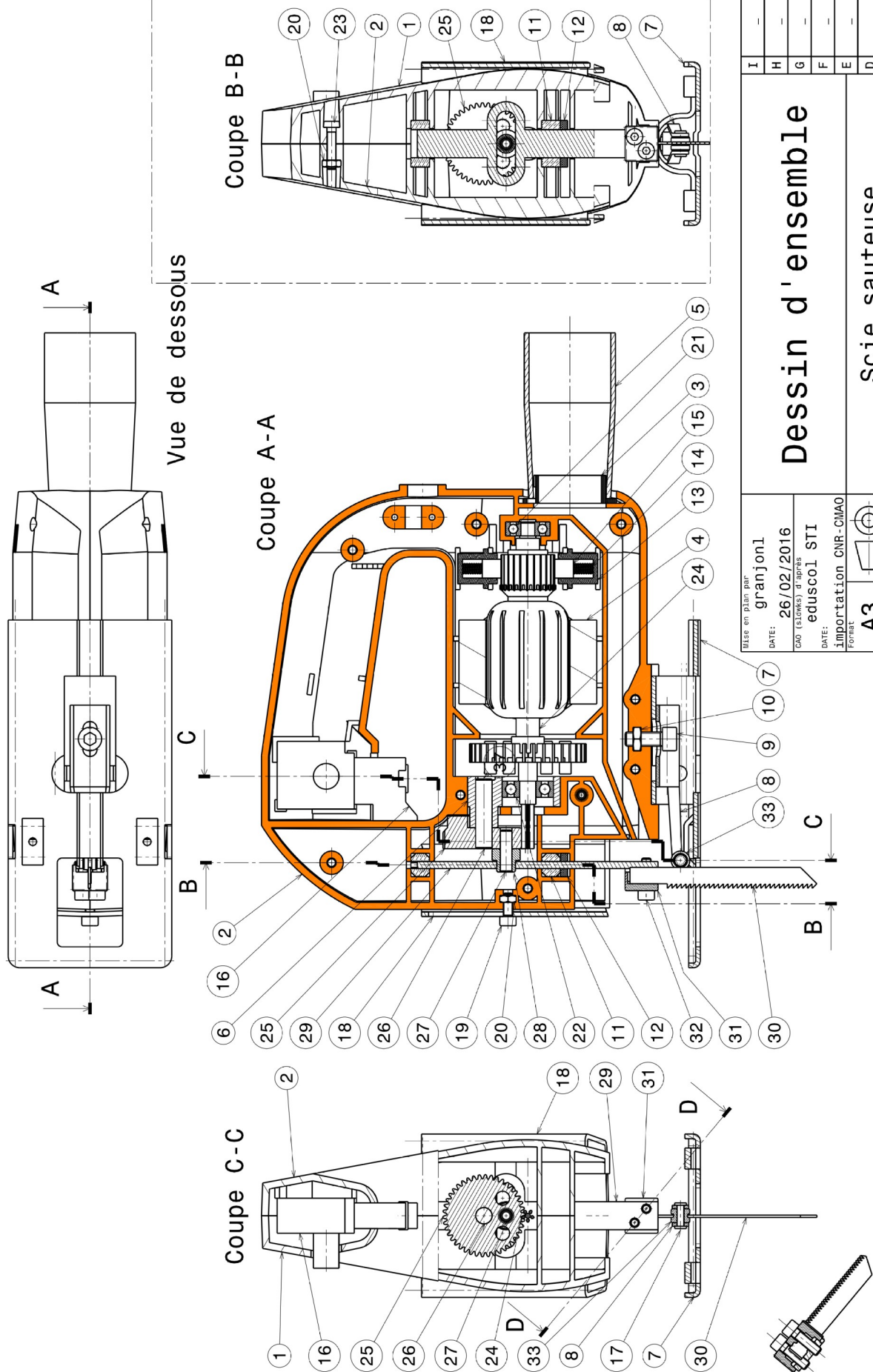
3. Combien de mobilité souhaite on obtenir pour ce mécanisme. Justifier

(1 point)

4. Il y a-il des mobilités internes, si oui, combien ?
Décrire alors le mouvement de la ou des classes d'équivalence concernées (1 point)
5. Quel est alors le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme. Justifier. (1 point)
6. Proposer un schéma cinématique spatial de ce mécanisme. (2 points)
7. Proposer un schéma cinématique plan de ce mécanisme dans le plan de la figure 1 (1 point)
8. En se basant sur la figure 1 et les données associées, Exprimer la relation entre l'angle α et la position de la lame $y(t)$. Vous donnerez aussi la relation entre α et $x(t)$ (2 points)

Partie 2 Cinématique

9. Faire les schémas plan paramétrés permettant de passer de R_0 à R_1 et de R_0 à R_2 . En déduire les vecteurs taux de rotation $\Omega(1/0)$ et $\Omega(2/0)$ (1 point)
10. Exprimer la vitesse du point B relativement à R_0 , résultat en projection dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$. Vous l'exprimerez en fonction de $\alpha(t)$ (1 point)
11. Exprimer l'accélération du point B relativement à R_0 , résultat en projection dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$. Vous l'exprimerez en fonction de $\alpha(t)$ (1 point)
12. Exprimer, en fonction de $y(t)$ la vitesse du point C appartenant à R_3 relativement à R_0 (0,5 pts)
13. Exprimer l'accélération du point C relativement au référentiel R_0 . (1 point)
14. Exprimer le torseur cinématique du solide 3 relativement à R_0 réduit au point C (0,5 pts)
15. Transférer ce torseur au point B (0,5 pts)
16. En déduire la relation liant $\dot{y}(t)$ et $\dot{\alpha}(t)$ (0,5 pts)
17. La scie est donnée pour 2000 coups par minutes, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{42}$, $e = 9,5$ mm, on suppose $\ddot{\alpha}(t) = 0$
Calculer la vitesse de coupe maximale ($\max(\dot{y}(t))$) (0,5 pts)
18. Exprimer le torseur cinématique de la roue (associée à R_2), réduit au point A. (0,5 pts)
19. Déplacer ce torseur en F. En déduire la vitesse du point F appartenant à R_2 relativement à R_0 , en projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ (0,5 pts)
20. Exprimer le torseur cinématique du pignon 1 réduit au point O en projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$. Déplacer ce torseur en F. En déduire la vitesse du point F appartenant à R_1 relativement à R_0 , en projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ (1 point)
21. Comme indiqué sur la Figure 1. le pignon 1 roule sans glisser sur la roue 2 en F. Exprimer la condition de roulement sans glissement et en déduire la relation liant $\dot{\alpha}(t)$ et $\dot{\beta}(t)$ (1 point)
22. Calculer la vitesse de rotation du rotor R_1 $\dot{\beta}(t)$ (0,5 pts)
23. Calculer la valeur de l'accélération du point B (0,5 pts)



Mise en plan par granjonl		I
DATE: 26/02/2016		H
CAO (S.I.M.A.S) d'après eduscol STI		G
DATE: importation CNR-CMAO		F
Format: A3		E
Échelle: 2:3		D
RECHT (kg): XXX		C
Dessin N°: 192-106-195-2016-02-26-S2		B
SHEET: 1/1		A

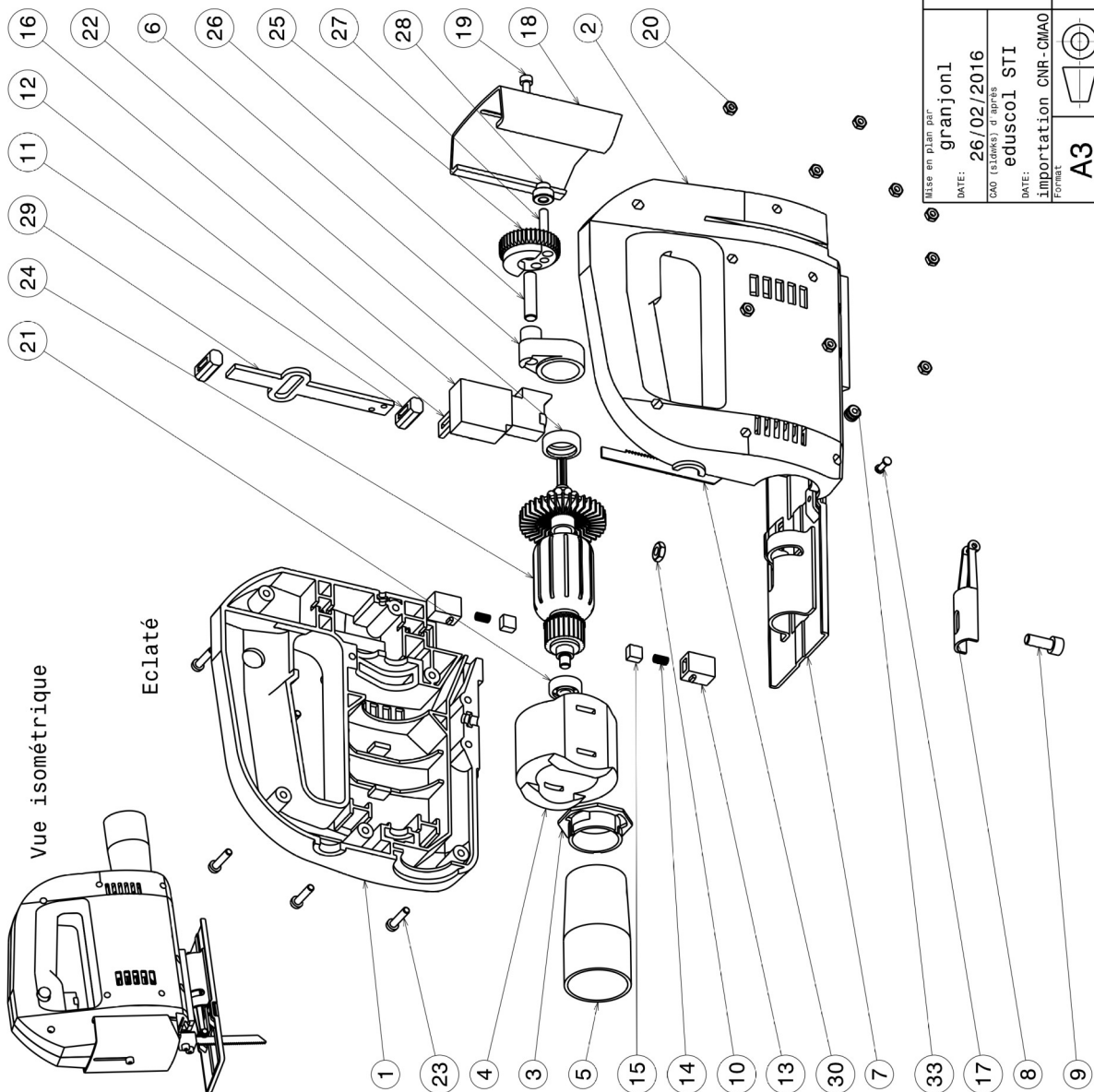
Dessin d'ensemble

Scie sauteuse

Coupe D-D limitée à la fixation de lame

Récapitulatif sur ensemble scie
sauteuse
Pièces différentes : 33
Total des pièces : 55

Numéro	Quantité	Nomenclature
1	1	corps gauche
2	1	corps droit
3	1	raccord aspiration
4	1	stator
5	1	manchon aspiration
6	1	support rlt
21	1	Roulement à billes à contact radial 626 ZZ
22	1	Roulement à billes à contact radial 627 ZZ
7	1	plateau
8	1	support galet
9	1	VIS CHC M6x16
10	1	Ecrou H M6
11	2	guide
12	1	racleur
13	2	porte charbon
14	2	ressort
15	2	charbon
16	1	bouton ma
17	1	rivet
18	1	cache securite
19	1	Vis CHC M4x10
20	10	Ecrou H M4
23	9	Vis-CS-M4x18
24	1	rotor
25	1	roue
26	1	axe d7-30
27	1	axe d5-18
28	1	bague
29	1	support lame
30	1	lame
31	1	bloque lame
32	2	VIS CHC M4-14
33	1	galet



Dessin d'ensemble

Scie sauteuse

Mise en plan par granjonl	
DATE: 26/02/2016	
CAO (si laines) d'après eduscol STI	
DATE: importation CNR-CMAO	
Format	
A3	
Echelle	2:3
XXX	
WEIGHT (kg)	

Dessin N°	192-106-195-2016-02-26-S2
SHEET	1/1

Robot pâtissier

Le schéma d'un robot malaxeur pour pâte alimentaire est présenté sur la figure suivante. L'arbre 1 est entraîné en rotation à vitesse constante.

L'objectif est de déterminer le mouvement de la pale de mélange, en particulier les vitesses et accélération du point B.

Note : sur la Figure 2, dans la vue du bas les pièces 1 et 2 sont présentées dans le même plan.

Questions

- Exprimer, en fonction des données disponibles
 - $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$
 - $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$
 - $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$
 - $\{V(1/0)\}$ réduit au point de votre choix
 - $\overrightarrow{V}(A \in 1/R_0)$
 - $\overrightarrow{V}(A \in 2/R_1)$
 - $\{V(2/0)\}$ réduit en A
 - $\overrightarrow{V}(K \in 2/R_0)$
- En utilisant la condition de roulement sans glissement en K, déterminer la relation liant les angles α et β
- Exprimer, en fonction de α et de ses dérivées et des dimensions du système
 - $\overrightarrow{V}(B \in 2/R_0)$
 - $\gamma(B \in 2/R_0)$
 - Dans quelle position du système la vitesse de B est elle maximale ?
 - Dans quelle position de B l'accélération est elle maximale ?

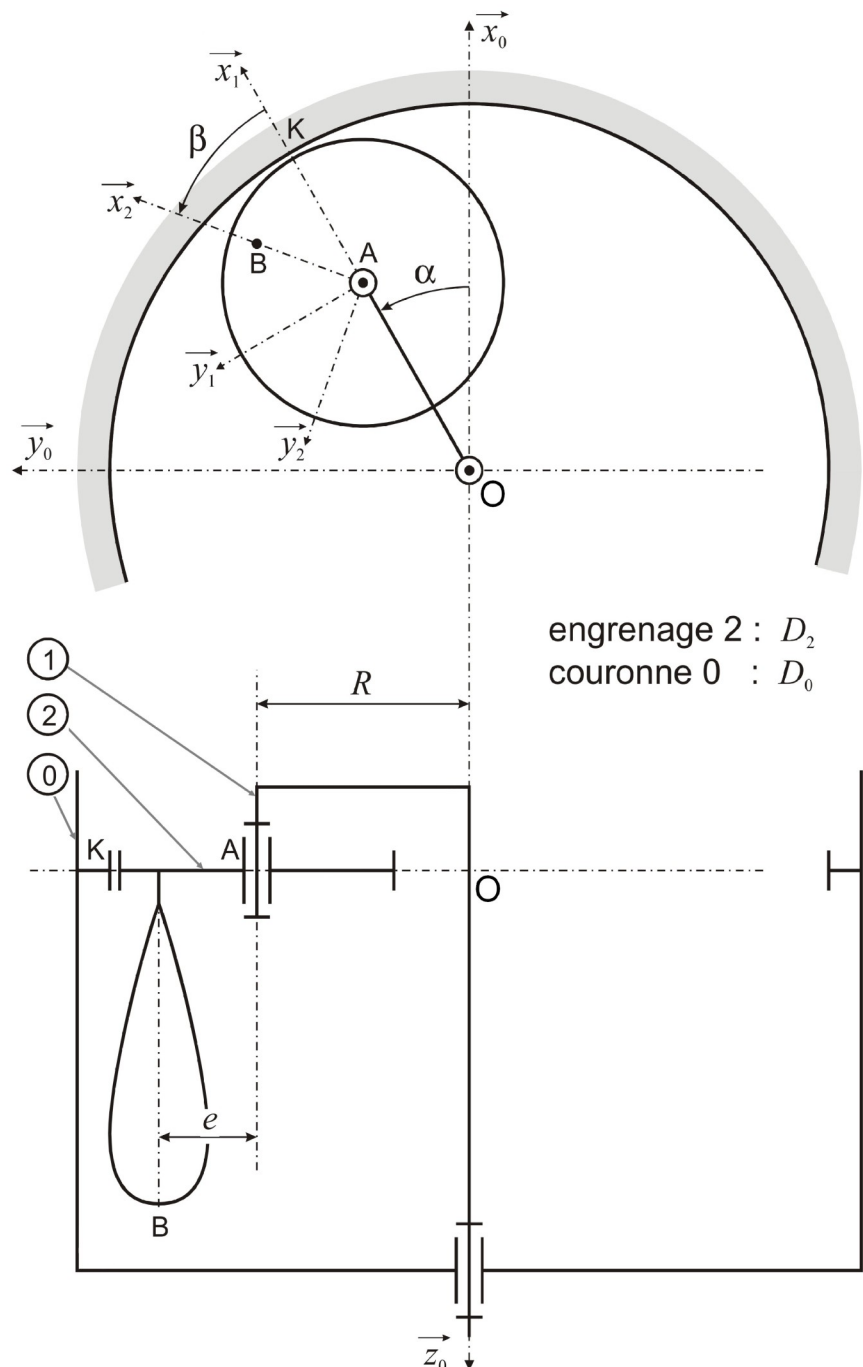
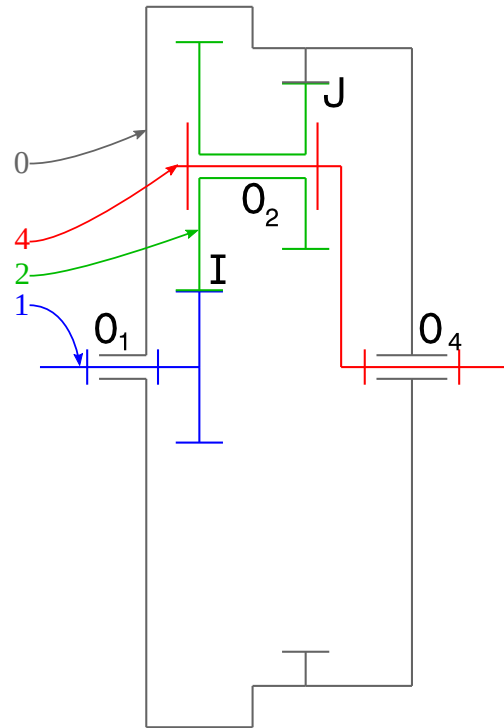


Figure 2: Schema du système

Train Epicycloïdal

Soit le réducteur à train épicycloïdal représenté ci-dessous

- R_0 : référentiel $(O_4, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
associé à la couronne 0 de rayon r_0
- R_1 : référentiel $(O_1, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
associé au planétaire 1 de rayon r_1
en liaison pivot de centre O_1 , d'axe $\vec{x}$
de paramètre $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ avec R_0
- R_4 : référentiel $(O_4, \vec{x}, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$
associé au porte satellite 4
en liaison pivot de centre O_4 , d'axe $\vec{x}$ de
paramètre $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$ avec R_0
en liaison pivot de centre O_2 , d'axe $\vec{x}$ de
paramètre $\beta = (\vec{y}_4, \vec{y}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$ avec R_2
- R_2 : référentiel (O_2, x, y_2, z_2)
associé au satellite 2
en liaison pivot avec R_4 telle que décrite ci
dessus
en liaison engrenage en I avec R_1 (rapport r_1/r_2)
en liaison engrenage en J avec R_0 (rapport r_3/r_0)



$$\begin{aligned}\vec{O_1I} &= e \cdot \vec{x} + r_1 \vec{y}_1 \\ \vec{O_2I} &= -e \cdot \vec{x} - r_2 \vec{y}_2 \\ \vec{O_2J} &= e \cdot \vec{x} + r_3 \vec{y}_2 \\ \vec{O_4J} &= -e \cdot \vec{x} + r_0 \vec{y}_0\end{aligned}$$

Figure 3: schéma du réducteur

- ### Questions
- Ecrire les vecteurs taux de rotation de chacun des solides relativement à R_0
 - Ecrire le torseur cinématique de S_4 par rapport à R_0 exprimé en O_4 . Le déplacer en O_2
 - Ecrire le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 exprimé en O_1
 - Ecrire le torseur cinématique de S_2 par rapport à R_0 exprimé en O_4
 - En utilisant le champ des vecteurs vitesses, exprimer les vitesses suivantes :
 - $\vec{V}(J \in 2/R_0)$
 - $\vec{V}(I \in 2/R_0)$
 - $\vec{V}(I \in 1/R_0)$
 - En exprimant la condition de roulement sans glissement en J, trouver une relation liant β et θ en fonction des rayons primitifs des roues dentées
 - En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, trouver une relation liant θ et α

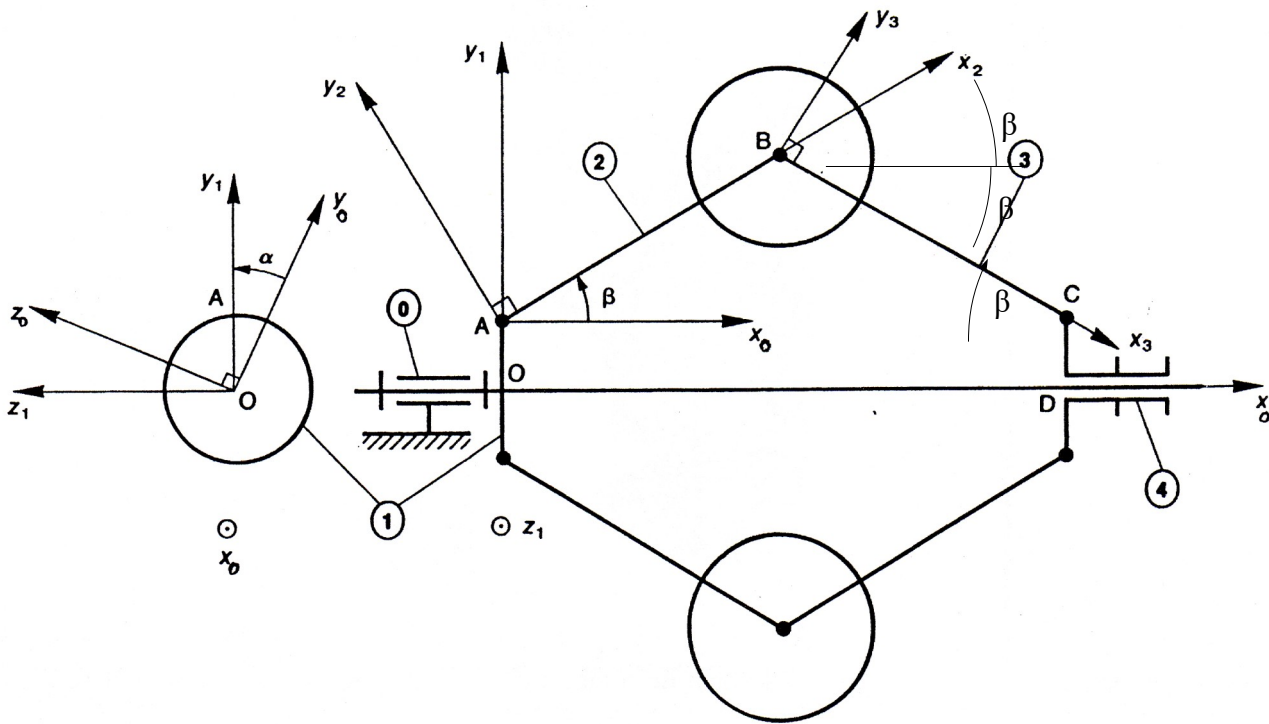
Note : on rappelle que $r_i = m_i \frac{Z_i}{2}$ avec m_i module du pignon i et Z_i nombre de dents du pignon i . Deux pignons ne peuvent engrener ensemble que s'il ont le même module

Régulateur de Watt

Le système ci dessous sert à asservir la vitesse de rotation d'un mécanisme entraîné par une machine à vapeur. Il a été imaginé et construit par James Watt pour réguler les pompes d'épuisement des eaux de ruissellement dans les mines écossaises.

La vitesse de rotation de la pompe est transmise par l'intermédiaire d'une courroie au solide « 1 » en liaison pivot avec le bâti « 0 ». Les deux boules « 2 » et « 2' » sont centrifugées par la vitesse de rotation, qui fait varier l'angle β . En l'absence de vitesse de rotation, l'angle β est ramené à 0 par la gravité $\vec{g} = g \vec{x}$ le mouvement des pièces « 2 » et « 2' » entraîne, par l'intermédiaire des bielles « 3 » et « 3' » le coulisseau « 4 » en liaison glissière avec l'arbre « 1 ». Une fourchette en prise avec la pièce « 4 » permet de fermer l'arrivée de vapeur lorsque le point D s'approche du point O ou, au contraire, d'ouvrir l'arrivée de vapeur si le point D s'éloigne du point O.

Soit $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au bâti 0 du régulateur à boules schématisé ci-dessous.



Le corps 1 a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_{0,1})$ avec 0. Soit $R_1 (O, \vec{x}_{0,1}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à 1. On pose : $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{OA} = r \vec{y}_1$ $r > 0$

Le levier 2 a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_{1,2})$ avec 1. Soit $R_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2})$ un repère lié à 2. On pose : $(\vec{AB} = L \vec{x}_2$ et $L > 0$). $\beta(t) = (\vec{x}_{0,1}, \vec{x}_2)$

Le levier 3 a une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_{1,2,3})$ avec 1. Soit $R_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_{1,2,3})$ un repère lié à 3. On pose : et $\vec{BC} = L \vec{x}_3$).

La pièce 4 a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{x}_{0,1})$ avec 0. Soit $R_4 (D, \vec{x}_{0,1}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à 4. Le point D est situé sur l'axe $(O, \vec{x}_{0,1})$. La pièce 4 a une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_{1,2,3})$ avec 3. On pose : $\vec{DC} = r \vec{y}_{1,2}$

- a- Déterminer les vecteurs instantanés de rotation : $\overrightarrow{\omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\omega(2/0)}$ $\overrightarrow{\omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\omega(3/0)}$
- b- Calculer les vecteurs vitesse du point B : $\overrightarrow{V(B \in 2/1)}$; , par dérivation, $\overrightarrow{V(B \in 1/0)}$ par le champ des vecteurs vitesses et $\overrightarrow{V(B \in 2/0)}$ par composition des vitesses
- c- Calculer les vecteurs vitesse du point C : $\overrightarrow{V(C \in 3/2)}$; $\overrightarrow{V(C \in 2/0)}$ $\overrightarrow{V(C \in 3/0)}$
- c- Calculer le vecteurs vitesse du point D : $\overrightarrow{V(D \in 4/0)}$
- d- Calculer les vecteurs accélération du point B : $\overrightarrow{\gamma(B \in 2/1)}$; $\overrightarrow{\gamma(B \in 1/0)}$ $\overrightarrow{\gamma(B \in 2/0)}$

appareil d'extraction

La figure page suivante représente une partie d'un appareil d'extraction pour machines à mouler par injection. Cet appareil saisit les pièces (brûlantes) à la sortie de la machine à mouler, les soulève, les transporte et les dépose à un endroit convenu.

Le repère $R_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au support 0. L'appareil d'extraction est schématisé par l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$. Pour accroître la lisibilité de la figure qui donne grossièrement l'allure de l'appareil, le support 0, la première unité de translation 1, et la plus grande partie de la deuxième unité de translation 2 ne sont pas représentés.

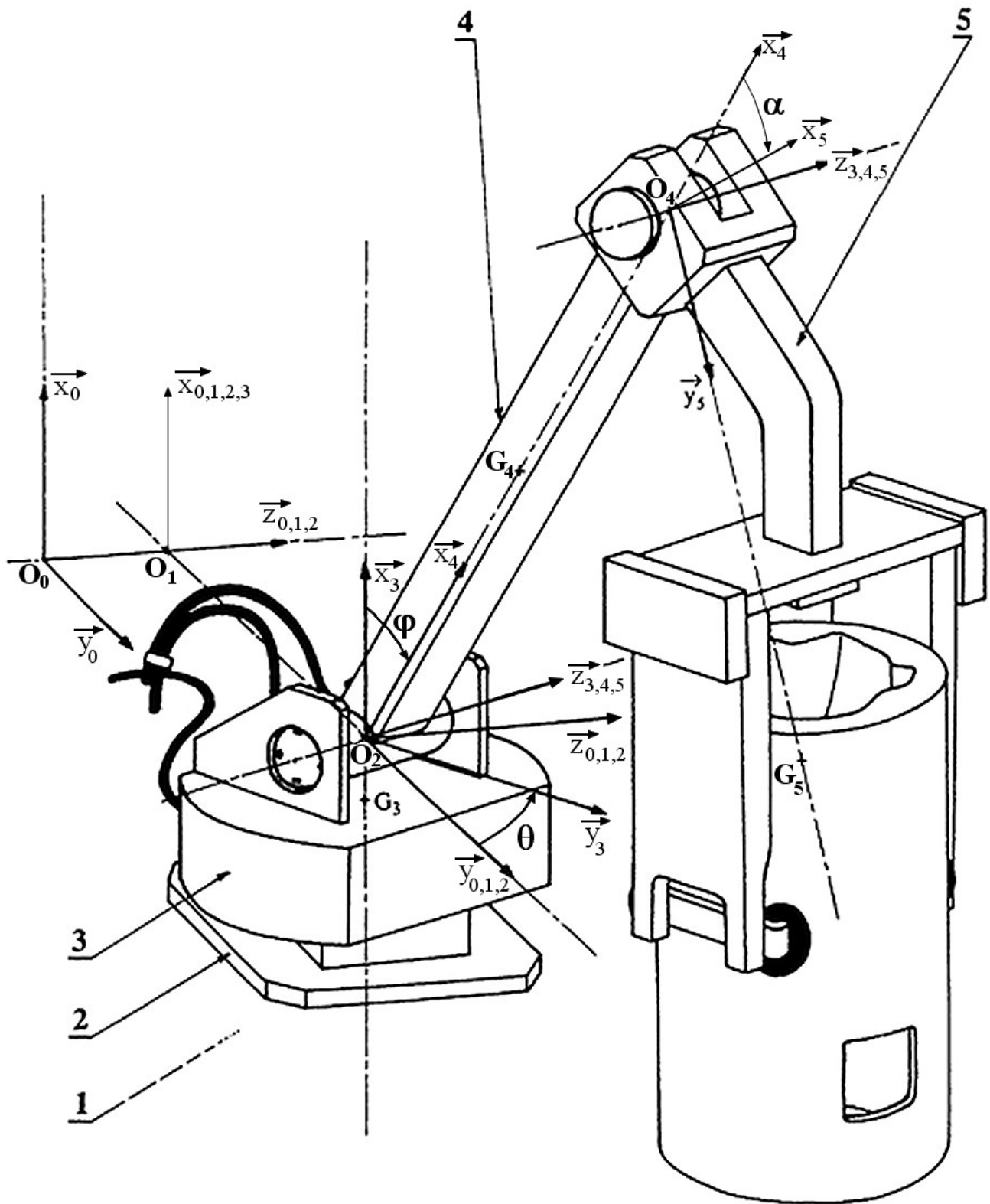
1 : Première unité de translation. Repère lié : $R_1 (O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Mouvement de 1 par rapport à 0 : translation rectiligne de direction $\vec{z}_0$. La position de 1 par rapport à 0 est repérée par z , tel que $\overrightarrow{O_0 O_1} = z \vec{z}_0$, z étant une fonction continue et infiniment dérivable du temps.

2 : Deuxième unité de translation. Repère lié : $R_2 (O_2, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ Mouvement de 2 par rapport à 1 : translation rectiligne de direction $\vec{y}_0$. La position de 2 par rapport à 1 est repérée par y , tel que $\overrightarrow{O_1 O_2} = y \vec{y}_0$, y étant une fonction continue et infiniment dérivable du temps.

3 : Corps pivotant. Repère lié : $R_3 (O_2, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ 3. Mouvement de 3 par rapport à 2 : rotation autour de $(O_2, \vec{x}_0)$. La position de 3 par rapport à 2 est repérée par $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$. Le point G_3 est tel que $\overrightarrow{O_2 G_3} = a \vec{x}_0$, a étant une constante positive.

4 : Bras d'extraction. Repère lié : $R_4 (O_2, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_3)$. Mouvement de 4 par rapport à 3 : rotation autour de $(O_2, \vec{z}_3)$. La position de 4 par rapport à 3 est repérée par $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$. Le point G_4 est tel que $\overrightarrow{O_2 G_4} = d \vec{x}_4$, d étant une constante positive.

5 : Unité de préhension avec la pièce moulée qu'elle agrippe. Repère lié : $R_5 (O_4, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_3)$. $\overrightarrow{O_2 O_4} = h \vec{x}_4$, h étant une constante positive. Mouvement de 5 par rapport à 4 : rotation autour de $(O_4, \vec{z}_3)$. La position de 5 par rapport à 4 est repérée par $\alpha = (\vec{x}_4, \vec{x}_5) = (\vec{y}_4, \vec{y}_5)$. Le point G_5 est tel que $\overrightarrow{O_4 G_5} = b \vec{y}_5$, b étant une constante positive.



Questions

Faites les schémas plans paramétrés visualisant

- le passage de R_0 à R_3 ,
- le passage de R_3 à R_4 ,
- le passage de R_4 à R_5 .

Exprimer les vecteurs taux de rotation

- $\overline{\omega}(R_3/R_0)$
- $\overline{\omega}(R_4/R_3)$
- $\overline{\omega}(R_5/R_4)$
- $\overline{\omega}(R_4/R_0)$
- $\overline{\omega}(R_5/R_0)$

Calculer (littéralement) les vitesses suivantes :

- $\overline{V}(O_2/R_0)$ par dérivation.
- En déduire $\{ \overline{V}(R_2/R_0) \}$ et $\{ \overline{V}(R_3/R_0) \}$ exprimés au point O_2 .
- En déduire $\overline{V}(G_3/R_0)$.
- $\overline{V}(O_4/R_3)$ par la méthode de votre choix.
- $\overline{V}(O_4 \in 3/R_0)$ en utilisant le torseur cinématique du solide 3 relativement au référentiel R_0 .
- en déduire $\overline{V}(O_4/R_0)$ en utilisant la composition des vitesses, et, par similitude, $\overline{V}(G_4/R_0)$
- $\overline{V}(G_5/R_0)$ par dérivation du vecteur position.

Calculer (littéralement) les accélérations suivantes

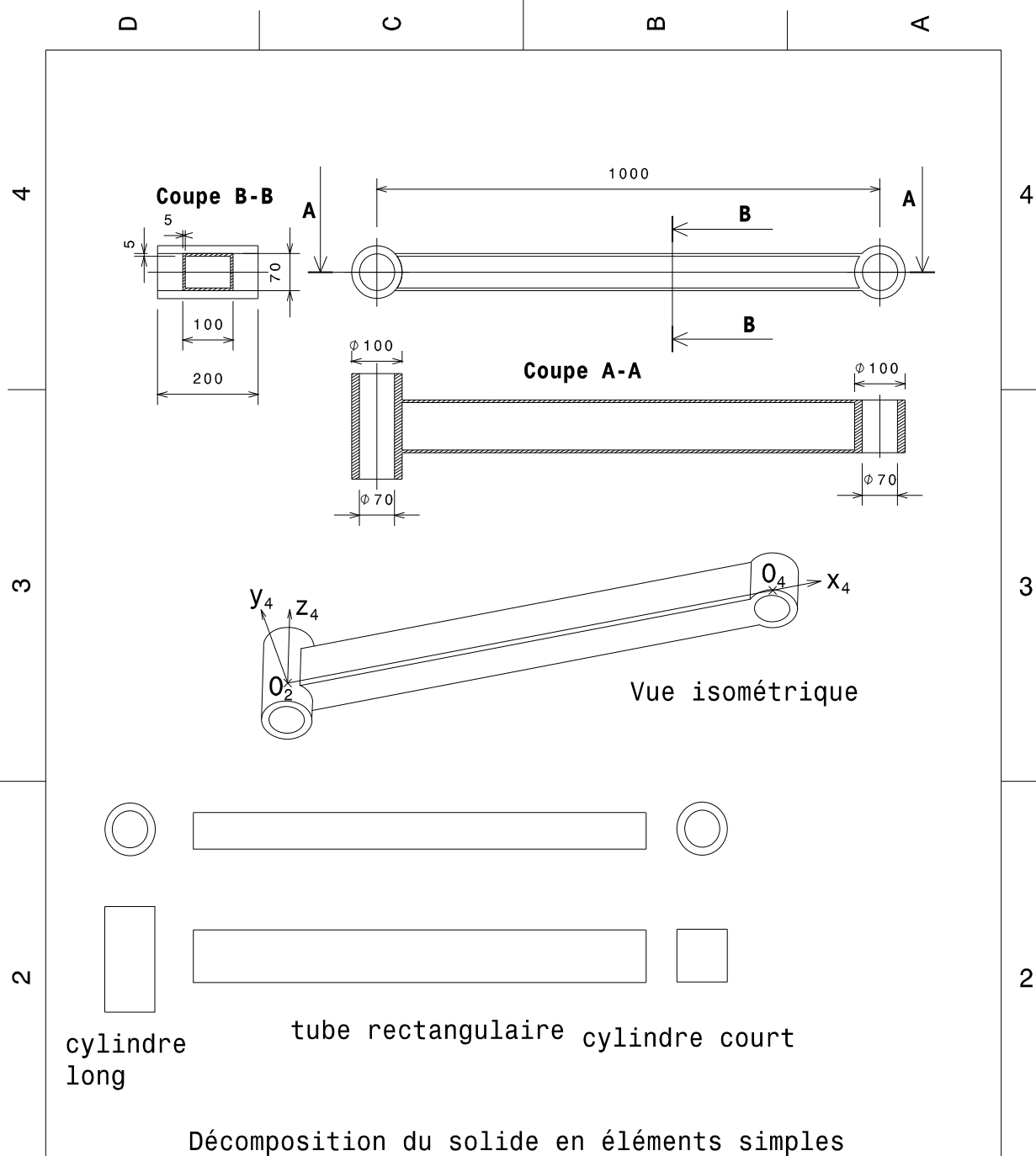
- $\overline{\gamma}(O_2/R_0)$ en déduire $\overline{\gamma}(G_3/R_0)$
- $\overline{\gamma}(G_4/R_3)$
- $\overline{\gamma}(G_4 \in 3/R_0)$
- $\overline{\gamma}(G_4/R_0)$ en utilisant la composition des accélérations
- $\overline{\gamma}(G_5/R_0)$ par dérivation de $\overline{V}(G_5/R_0)$

Géométrie des masses

Le solide 4 est représenté par le dessin de la page suivante. Ce solide a pour masse m_4 , pour centre d'inertie

G_4 . La matrice d'inertie de ce solide au point O_2 est de la forme $\overline{\overline{I}}(O_2, S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & -F_4 & -E_4 \\ -F_4 & B_4 & -D_4 \\ -E_4 & -D_4 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_{3,4,5})}$

- certains des éléments de cette matrice d'inertie sont ils nuls ? Pourquoi ?
- En décomposant la pièce comme indiqué en page suivante, et en supposant la pièce en acier ($\rho=7860 \text{ kg/m}^3$) calculer la masse de la pièce.
- Quelle est la valeur numérique de d ? ($\overline{O_2 G_4} = d \vec{x}_4$)
- Calculer la matrice d'inertie du cylindre long en son centre d'inertie
- Calculer la matrice d'inertie du cylindre court en son centre d'inertie
- Décrire précisément les calculs que vous devriez effectuer pour calculer A_4 , B_4 et C_4 sans effectuer les calculs
- Calculer ces trois valeurs et donner la matrice d'inertie $I(O_4, S_4)$ dans R_4



DESIGNED BY: L. Granjon	Bras d'extraction repère 4		I	-
DATE: 22/04/2012			H	-
CHECKED BY: F. Gire			G	-
DATE: 03/05/2012			F	-
SIZE A4	Extracteur de pièces		E	-
SCALE			D	-
WEIGHT (kg) 20,98			C	-
DRAWING NUMBER 106-192			B	-
SHEET 1/1			A	-

Sujet de cinématique et de géométrie des masses 2012

Mouvement d'une patte d'un robot marcheur

Ce sujet est construit à partir du robot « podibot » d'Alex Narbonne <http://alex.narbonne.free.fr/>, sur qui sont repris les schémas.

La cinématique est aussi celle d'un des robot qui a participé à la course de robot inter GMP de 2013 : <http://josyrobotmarcheur.files.wordpress.com>

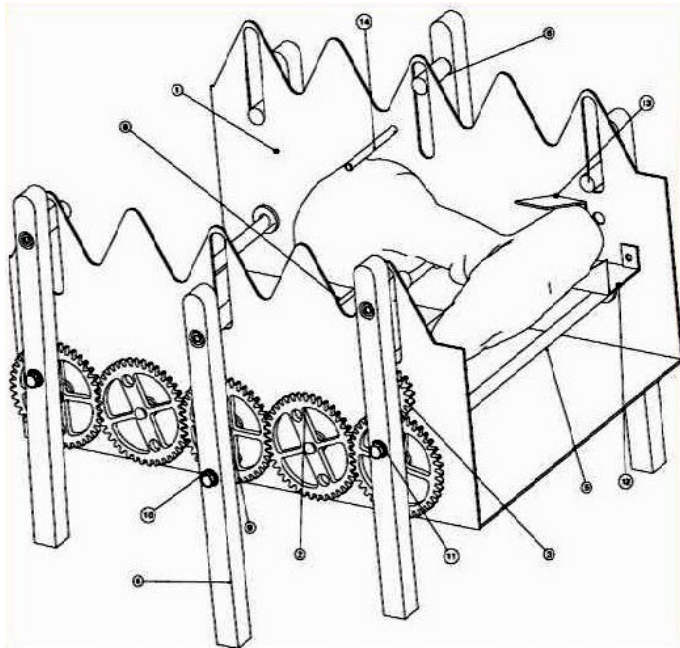


Figure 4: Josy robot marcheur - concours inter GMP 2013

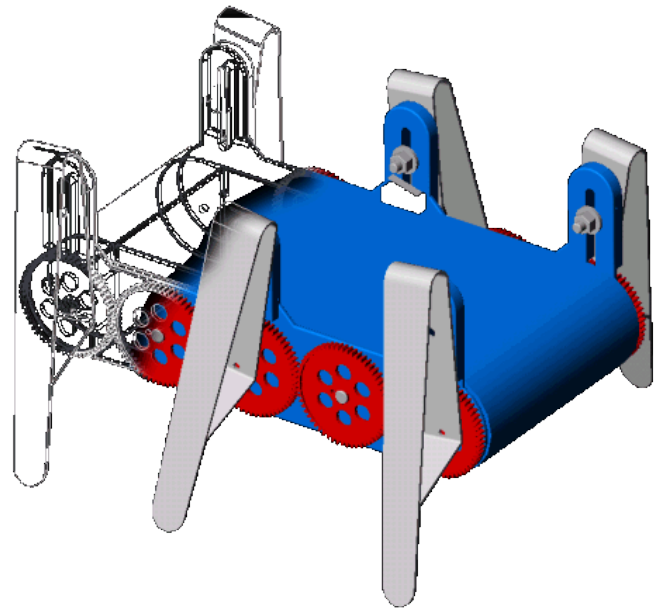
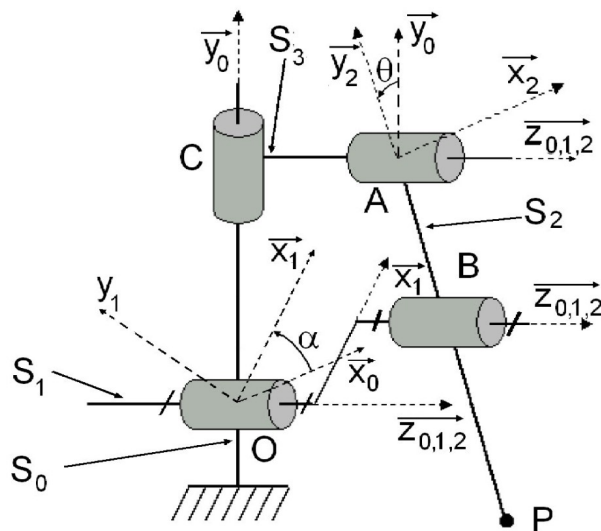
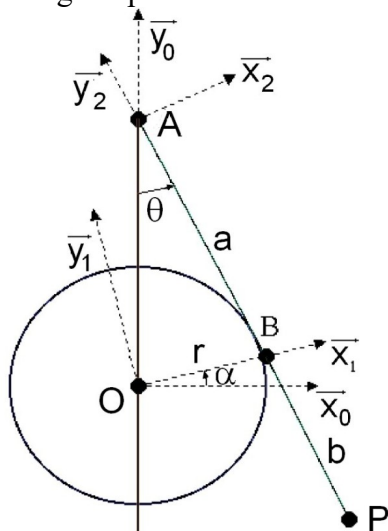


Figure 5: podibot - robot d'Alex Narbonne

Les six pattes du robot sont identiques et sont synchronisées trois par trois selon la technique du « trépied alterné ». Au sein de chaque flanc la patte du centre est décalée angulairement par rapport aux deux autres d'un angle π .

L'étude ne porte que sur une seule patte du robot, les six pattes ayant un mouvement similaire quoi que déphasé d'un angle π pour trois d'entre elles.



Le solide S_0 auquel est associé le référentiel $R_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ représente la classe d'équivalence du bâti du robot.

Le solide S_1 est le vilebrequin. Il lui est associé le référentiel $R_1 : (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Il est en liaison pivot de centre O , d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et d'angle $\alpha = (\vec{x}_0; \vec{x}_1) = (\vec{y}_0; \vec{y}_1)$ avec le bâti S_0 . Il lui est associé le référentiel

Sa masse est m_1 , son centre de gravité est sur l'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$, et son moment d'inertie autour de l'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$ est J_1 .

Le solide S_2 est la patte du robot. Il lui est associé le référentiel R_2 :

$$(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

- sa masse est m_2 , centre d'inertie G tel que $\vec{BG} = d \vec{y}_2$, matrice d'inertie $I(G, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2}$
- Il est en liaison pivot de centre B et d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_2$ avec le solide S_1
- Il est en liaison pivot glissant centre A et d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_2$ avec le solide S_3 , lui même en liaison pivot glissant de centre C et d'axe $\vec{y}_0$ avec le bâti.
- Le solide S_3 étant de petite dimension, nous pourrions considérer que le solide S_2 est en liaison ponctuelle en A, de normale $\vec{x}_0$ relativement à S_0 et simplifier ainsi le problème en n'utilisant pas le solide S_3 .**
- l'angle entre le référentiel R_0 et le référentiel R_2 est $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$

Les paramètres géométriques sont $\vec{OB} = r \vec{x}_1 + c \vec{z}_1$; $\vec{BA} = a \vec{y}_2$; $\vec{BP} = -b \vec{y}_2$; $\vec{AC} = -c \vec{z}_0$;

- Nous pouvons noter $\vec{OC} = y \vec{y}_0$ sachant que y varie en fonction de α
- Les paramètres a, b, c et r sont des constantes. Les paramètres y, θ et α sont des fonctions du temps.

Questions : Les calculs seront effectués en fonction des paramètres géométriques, des angles et de leurs dérivées. Surtout ne pas dériver les constantes !

- Écrire la fermeture géométrique entre les points O C A B. Montrer que $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{r}{a} \cos(\alpha) \right)$
- à partir de la fermeture géométrique précédente, calculer y en fonction de α sans faire intervenir θ .
- Faire les schémas plans paramétrés permettant de passer du référentiel R_0 au référentiel R_1 et du référentiel R_0 au référentiel R_2
- Déterminer les matrices de passages de la base 1 à la base 0 et de la base 2 à la base 0
- calculer $\overrightarrow{\omega(R_1/R_0)}$ et $\overrightarrow{\omega(R_2/R_0)}$. En déduire $\overrightarrow{\omega(R_2/R_1)}$
- calculer la vitesse du point B appartenant à R_1 relativement au référentiel R_0 : $\overrightarrow{V(B \in R_1/R_0)}$
- Que peut on dire de $\overrightarrow{V(B/R_1)}$ et de $\overrightarrow{V(B/R_2)}$? En déduire $\overrightarrow{V(B/R_0)}$ puis $\overrightarrow{V(B \in R_2/R_0)}$
- en déduire les torseurs cinématiques des solide S_1 et S_2 relativement à R_0 $\{ \overrightarrow{V(S_1/R_0)} \}$ et $\{ \overrightarrow{V(S_2/R_0)} \}$ exprimé en B.
- Calculer $\overrightarrow{V(P/R_1)}$ et $\overrightarrow{V(P \in R_1/R_0)}$
- En utilisant la composition des vitesses, calculer $\overrightarrow{V(P/R_0)}$.
- En utilisant le torseur cinématique du solide S_2 précédemment déterminé, calculer $\overrightarrow{V(A \in R_2/R_0)}$
- Calculer $\overrightarrow{\gamma(B \in R_1/R_0)}$
- Calculer $\overrightarrow{\gamma(G \in R_2/R_1)}$
- Calculer $\overrightarrow{\gamma(G \in R_1/R_0)}$ et l'accélération de coriolis $\overrightarrow{\gamma_c(G; R_1/R_0)}$

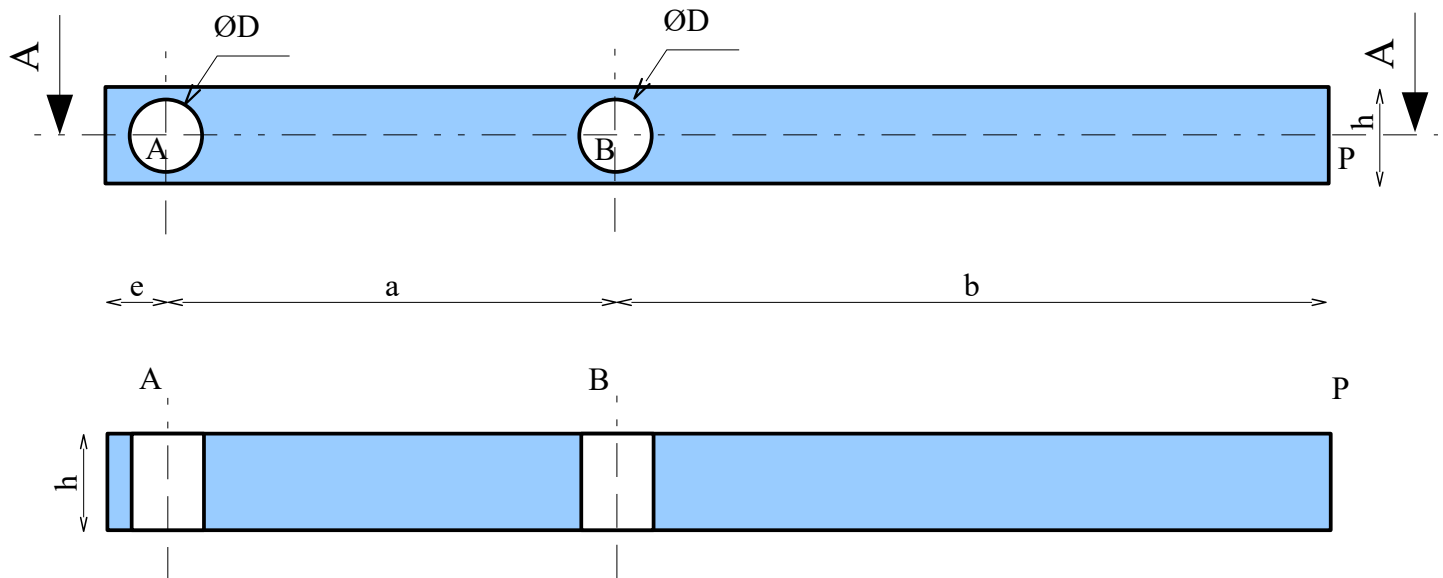
15. En déduire $\vec{a}(G/R_0)$

Une patte du robot (S_2) peut être assimilée au solide dont le plan est donné ci dessous. Le solide est de masse volumique ρ

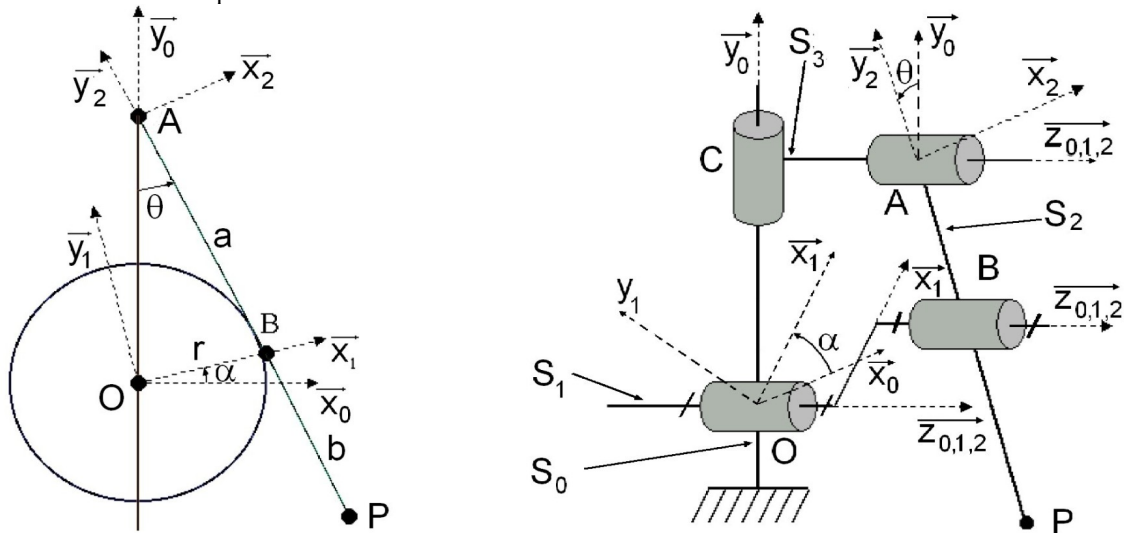
16. Calculer sa masse

17. Les coordonnées de son centre d'inertie

18. Sa matrice d'inertie exprimée au point B.



Pour mémoire : Schéma cinématique

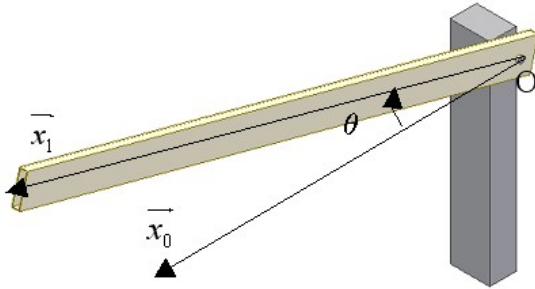


Etude comparative de deux systèmes de barrière levante

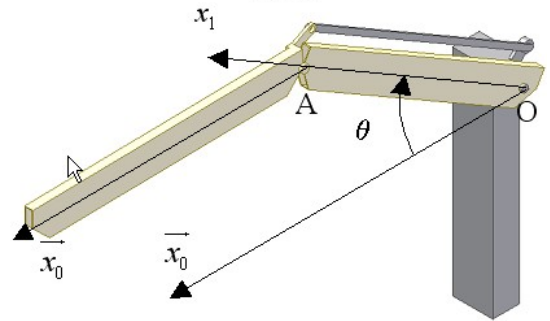
L'objet de l'étude est de comparer le couple moteur nécessaire à l'ouverture d'une barrière levante, pour deux mécanismes différents.

Les mécanismes sont décrits comme suit :

Type 1



Type 2



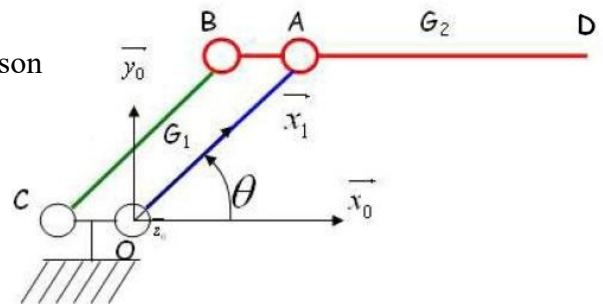
- Les deux barrières sont faites dans le même profilé aluminium.
- Les deux barrières sont modélisées par une tige sans épaisseur dont le centre d'inertie est à la moitié de sa longueur.
- On tient compte des actions mécaniques de pesanteur.

La barrière de type 1 est en liaison pivot de centre O, de paramètre θ par rapport au bâti, motorisée par un couple C_m . Elle a pour longueur $2 \cdot L$ et masse $2 \cdot m$.

La barrière de type 2 est telle que décrite ci-contre,

- La demi barrière 1 de longueur L et de masse m est en liaison pivot motorisée par un couple C_m en O par rapport au bâti.
- La demi barrière 2, de longueur L ($AD=L$) et de masse m est en liaison pivot en A par rapport à la demi barrière 1.
- un tirant 3 est en liaison rotule en B par rapport à la demi barrière 2 et en liaison pivot glissant en C par rapport au bâti. ABCO est un parallélogramme.

On note les distances suivantes : $L = OA = BC = AD = e$; $e = OC = AB$; G_1 est au milieu de OA, G_2 est au milieu de AD.



Q1 : déterminer $I(G_1, S_1)$ et $I(O, S_1)$ et pour les deux barrières (type 1 et type 2)

Q2 : A l'aide d'une seule équation du PFD que vous préciserez, déterminer C_m pour la barrière de type 1

Q3 : Faire le graphe des structures de la barrière de type 2 et justifier la méthode suivante pour déterminer C_m dans la barrière de type 2 :

- Appliquer le théorème du moment dynamique au solide 1 suivant $\vec{z}$ en O
- Appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 suivant $\vec{z}$ en B
- Appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\{2+3\}$ suivant $\vec{z}$ en C

Q4 Déterminer alors, en suivant cette méthode, le couple moteur dans la barrière de type 2

Q5 Déterminer C_m dans les deux cas à l'aide d'une méthode énergétique

Moulin à huile

L'étude porte sur un moulin à huile traditionnel tel que photographié ci contre.

Le bâti est constitué par le local du moulin et la meule « dormante » (fixe). Au centre de cette meule est positionné un arbre portant une couronne dentée. Cet arbre est maintenu vertical par la charpente du local et peut tourner sur lui même suivant l'axe vertical. Il est entraîné par un pignon (non visible ici) lui même mû par une roue hydraulique. La meule tournante est entraînée en rotation par l'arbre et repose sur la meule dormante. Les fruits à écraser passent entre les deux meules.



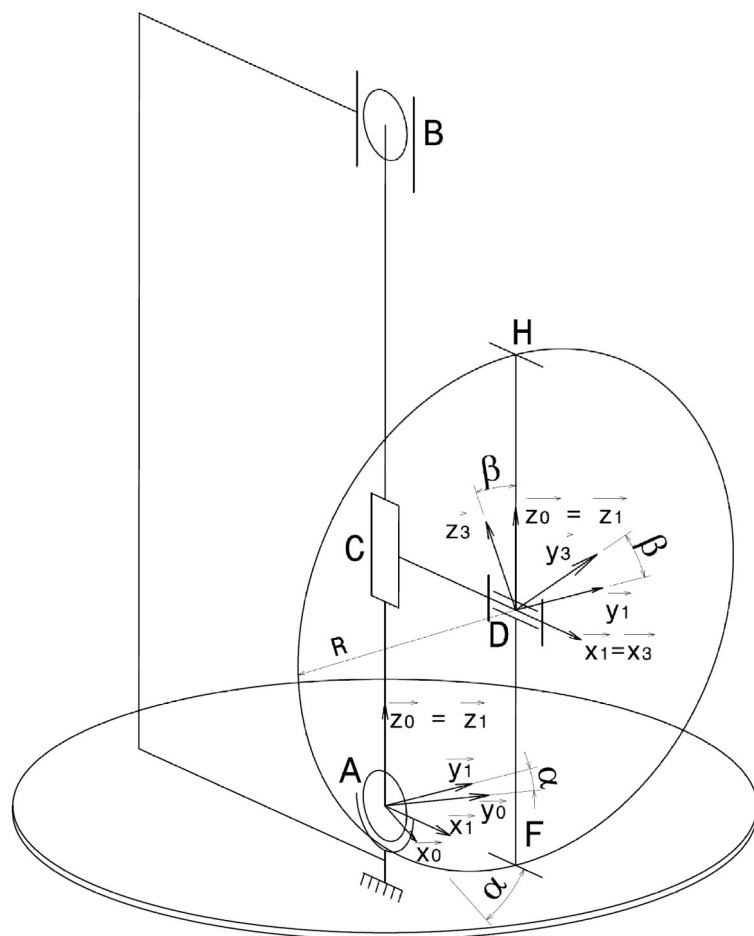
modélisation cinématique

Au bâti « 0 » est lié le référentiel $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

L'arbre vertical « 1 », de masse m_1 est en liaison rotule en A avec le bâti et en liaison linéaire annulaire de centre B, d'axe $\vec{z}_{0,1}$ avec le bâti. Il lui est associé le référentiel $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$.
 $\vec{x}_0, \vec{x}_1 = \vec{y}_0, \vec{y}_1 = \alpha(t) = \alpha$

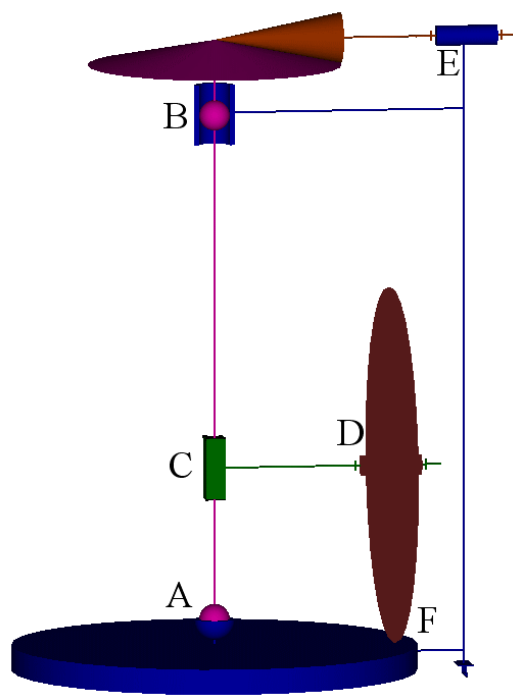
Il porte en son sommet un engrenage « conique » qui engrène avec l'arbre moteur

L'arbre moteur est en liaison pivot en E avec le bâti. Il engrène avec l'arbre vertical par un engrenage « conique ». Il ne fera pas l'objet de cette étude.



L'arbre porte meule « 2 » de masse m_2 est en liaison glissière suivant l'axe AB avec l'arbre vertical. Il lui est associé le référentiel $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$

La meule tournante « 3 » de masse m_3 et de centre d'inertie D est en liaison pivot de centre D



et d'axe $\vec{x}_1$ avec l'arbre porte meule. Elle est supposée en liaison ponctuelle en F avec la meule dormante en F, et supposer rouler sans glisser sur celle-ci. Il lui est associé le référentiel $(D, \vec{x}_{1,3}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. $\vec{y}_1, \vec{y}_3 = \vec{z}_{0,1}, \vec{z}_3 = \beta(t) = \beta$

$\vec{AB} = L \vec{z}_{0,1}$, $\vec{CD} = d \vec{x}_{1,3}$, $\vec{AF} = d \vec{x}_{1,3}$, $\vec{AC} = R \vec{z}_{0,1}$. La meule tournante est de rayon R. Le point E est suffisamment haut pour ne pas gêner le mécanisme étudié.

Cinématique

Les résultats seront donnés en fonction des paramètres a, b, L, d et R et des autres données de l'énoncé. Ne pas chercher à projeter les vecteurs dans une base particulière, sauf mention contraire dans la question.

1. Faire les schémas plans paramétrés permettant de passer de la base « 0 » à la base « 3 »
2. Déterminer $\omega(1/0)$, $\omega(3/0)$
3. Déterminer $\vec{V}(C/0)$, $\vec{V}(D/0)$. En déduire les torseurs cinématique $\{V(1/0)\}$ exprimé au point C et $\{V(3/0)\}$ exprimé au point D.
4. Écrire la condition de roulement sans glissement entre 3 et 0 au point F. En déduire une relation entre $\omega(3/1)$ et $\omega(1/0)$
5. Dans le mouvement de « 3 » par rapport à « 0 » donner
 1. La vitesse de roulement entre « 3 » et « 0 »
 2. La vitesse de pivotement entre « 3 » et « 0 »
6. Déterminer $\gamma(D/0)$
7. Déterminer $\gamma(F \in 3/0)$

Géométrie des masses

8. La meule « 3 » est assimilable à un cylindre creux de rayon extérieur R, de rayon intérieur r et de largeur a, d'axe $\vec{x}_{1,3}$.
 1. Donner la forme de la matrice d'inertie « 3 » en son centre d'inertie. Justifier pourquoi certains éléments de cette matrice sont nuls.
 2. Quelle particularité de la matrice d'inertie de « 3 » nous permet de l'exprimer dans la base « 1 » ?
 3. Donner finalement la matrice d'inertie de « 3 », en D et en projection dans la base « 1 » : $I(D,3)$
9. L'arbre porte meule « 2 » est assimilable à un cylindre de centre G_2 , tel que $\vec{CG}_2 = b \vec{x}_{1,3}$, de rayon r et de longueur 2b.
 1. Déterminer la matrice d'inertie de « 2 » en G_2 : $I(G_2,2)$.
 2. Transférer cette matrice d'inertie en C : $I(C,2)$
10. L'arbre vertical « 1 » est assimilable à un cylindre de rayon ρ et de longueur L situé entre A et B
 1. Donner la position du centre d'inertie de « 1 » dans le repère « 1 »
 2. Déterminer la matrice d'inertie de « 1 » en C : $I(C,1)$
11. Justifier pourquoi, au cours du fonctionnement, nous pouvons considérer que « 1 » et « 2 » forment un seul et même solide
12. Déterminer alors
 1. la position du centre de masse de « 1 »+« 2 » G_{1+2} relativement au point C
 2. la matrice d'inertie de l'ensemble « 1 »+« 2 » au point C en projection dans la base 1: $I(C,\{1+2\})$

Cinétique

13. Calculer le moment cinétique de « 3 » relativement à « 0 », au point D, en projection dans la base « 1 » $\sigma_{1D}(3/0)$. Justifier les simplifications éventuelles du calcul
14. Calculer le moment cinétique de « 1 »+« 2 » relativement à « 0 », au point C, en projection dans la base « 1 » $\sigma_{1C}(\{1+2\}/0)$. Justifier les simplifications éventuelles du calcul
15. Écrire le torseur cinétiques $\{C(3/0)\}$ exprimé au point D et dans la base « 1 »

16. Ecrire le torseur cinétiques $\{C_{(1+2)/0}\}$ exprimé au point C et dans la base « 1 »
17. Calculer le moment dynamique de « 3 » relativement à « 0 », au point D, en projection dans la base « 1 » $\overline{\delta}_{/D}(3/0)$. Justifier les simplifications éventuelles du calcul
18. Calculer le moment dynamique de « 1+2 » relativement à « 0 », au point C, en projection dans la base « 1 » $\overline{\delta}_{/C}((1+2)/0)$. Justifier les simplifications éventuelles du calcul
19. Ecrire le torseur dynamique $\{D(3/0)\}$ exprimé au point D et dans la base « 1 »
20. Ecrire le torseur dynamique $\{D((1+2)/0)\}$ exprimé au point C et dans la base « 1 »

CENTRE D'USINAGE 5 AXES A GRANDE VITESSE

Mise en situation.

La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante. L'outil se déplace par rapport à la pièce installée sur la machine outil. C'est le mouvement d'avance.

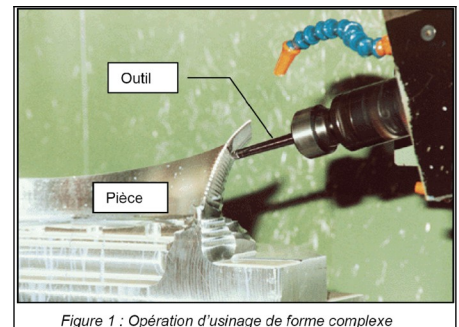


Figure 1 : Opération d'usinage de forme complexe

Le fraisage est un procédé d'usinage particulier dans lequel l'outil doit en plus tourner sur lui-même par rapport au bâti de la machine outil pour pouvoir couper la matière. C'est le mouvement de coupe.

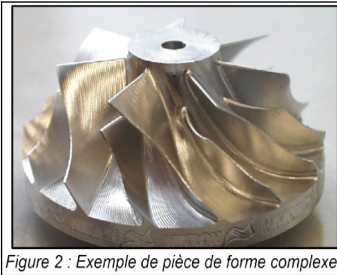


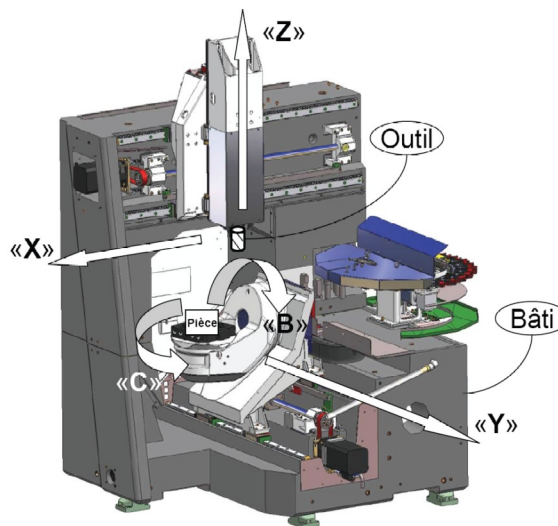
Figure 2 : Exemple de pièce de forme complexe

Les contraintes d'accessibilité pour l'usinage de formes complexes (figures 1 et 2) justifient l'utilisation de machines outils spécifiques capables :

- de translater l'outil par rapport à la pièce dans 3 directions orthogonales
- l'outil par rapport à la pièce

Le centre d'usinage « 5 axes Mikron, représenté sur la formes complexes. Il est

- 2 « axes » pour la par rapport au bâti. « X » et « Z ».
- 3 « axes » pour la pièce par rapport au est notée « Y » et les « C ».
- un dispositif de mise son axe géométrique rotation génère le



» **HSM 600U** de la société figure 3, permet l'usinage de constitué d'un bâti supportant : mise en mouvement de l'outil Ces 2 translations sont notées

mise en mouvement de la bâti. Une troisième translation 2 rotations sont notées « B » et

en rotation de l'outil autour de par rapport au bâti. Cette mouvement de coupe.

Le but du problème est de calculer les actions mécaniques dans les liaisons pivot en O1 et en O2 ainsi que les couples moteurs des axes C et B.

Cinématique de la machine

La broche est en liaison pivot d'axe $\vec{z}_0$ par rapport à l'axe vertical (ou axe Z repère « 5 »)

L'axe Z est en liaison glissière d'axe $\vec{z}_0$ et de paramètre connu $z(t)$ par rapport à l'axe longitudinal (ou axe X repère « 4 »).

L'axe X est en liaison glissière d'axe $\vec{x}_0$ et de paramètre connu $x(t)$ par rapport au bâti de la machine

La table de la machine (axe C repère « 3 ») est en liaison pivot d'axe $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$, de centre O_2 et de paramètre $\beta(t)$ par rapport à l'axe de basculement (Axe B)

L'axe B (repère « 2 ») est en liaison pivot d'axe $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$, de centre O_1 et de paramètre $\alpha(t)$ par rapport à l'axe transversal (axe Y repère « 1 »)

L'axe Y (repère « 1 ») est en liaison glissière d'axe $\vec{y}_0$ et de paramètre $y(t)$ par rapport au bâti de la machine.

Noter que, du fait des translations, les vecteurs unitaires indicés "0" et les vecteurs unitaires indicés "1" sont identiques.

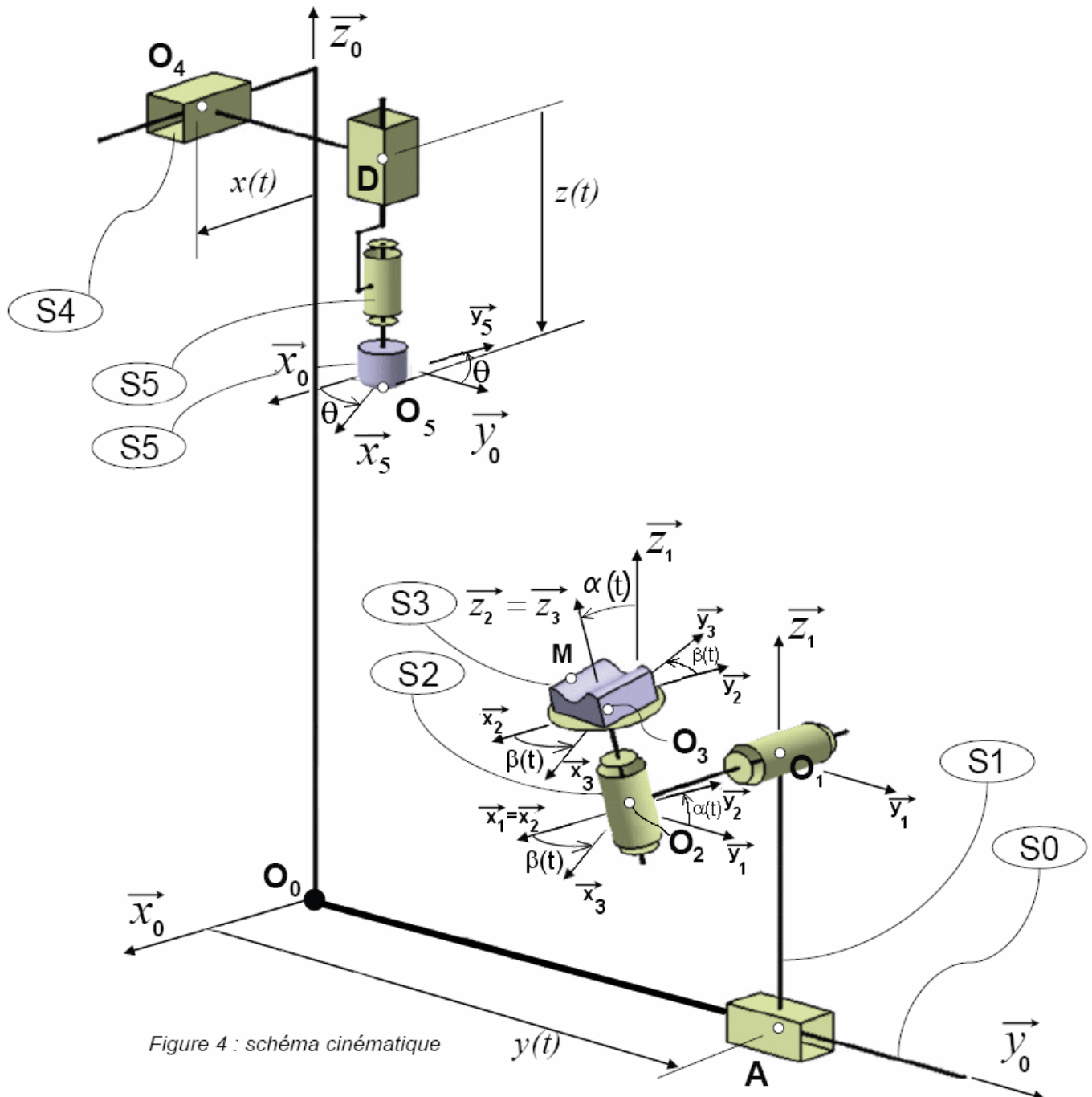


Figure 4 : schéma cinématique

Le système étudié s'appuie sur un sujet proposé au concours ATS de l'ENSEA – année 2006

Performances des axes « X », « Y » et « Z » du centre d'usinage.

	Variable	Course	Vitesse maximale	Couple moteur max.
Axe « X »	x(t)	800 mm	40 m/min	42 Nm
Axe « Y »	y(t)	600 mm	40 m/min	Non communiqué
Axe « Z »	z(t)	500 mm	40 m/min	Non communiqué

Performances des axes « B » et « C » du centre d'usinage.

	Variables	Course	Vitesse maximale	Accélération angulaire	Couple moteur
Axe « B »	$\alpha(t)$	+ 30° / - 110°	150 tours/min	50 rd/s²	680 Nm
Axe « C »	$\beta(t)$	360°	250 tours/min	100 rd/s²	340 Nm

Performances de la broche

	Variables	Course	Vitesse maximale	Puissance max	Couple moteur
Broche	$\theta(t)$	Infinie – deux sens de rotation	35 000 tr/min	30 kw	680 Nm

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0A} &= y(t) \cdot \vec{y}_0 & \overrightarrow{AO_1} &= l_1 \cdot \vec{z}_0 & \overrightarrow{O_1O_2} &= l_2 \cdot \vec{x}_1 & \overrightarrow{O_2O_3} &= l_3 \cdot \vec{z}_2 & \overrightarrow{O_0O_4} &= L_4 \vec{z}_0 + x(t) \vec{x}_0 \\ \overrightarrow{O_4D} &= L_5 \cdot \vec{y}_0 & \overrightarrow{DO_5} &= z(t) \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

avec l_1, l_2, l_3, L_4, L_5 : constantes liées à l'architecture de la machine.

	Masse	Centre d'inertie	Repère associé
Solide « 0 » (bâti)	m_0	G_0	$R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
Solide « 1 » : Axe y	m_1	O_2	$R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = R_1(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
Solide 2 : Axe B	m_2	O_2	$R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
Solide 3 : Axe C : table machine	m_3	O_3	$R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Nous supposons que les solides « 2 » et « 3 » ont respectivement pour matrice d'inertie :

$$\text{Solide « 2 » : } I(O_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \quad \text{Solide « 3 » : } I(O_3, 3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z}_{23})}$$

Questions

Cinématique (5 points)

1. Faire les schémas plans paramétrés permettant de visualiser les rotations de R_1 à R_2 puis de R_2 à R_3 . En déduire les vecteurs taux de rotation associés. Exprimer le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}_{(3/0)}$ (1 point)
2. Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(O_2/R_0)$ (1 point)
3. Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(O_3/R_0)$ (1 point)
4. Exprimer le vecteur accélération $\overrightarrow{a}(O_2/R_0)$ dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
5. Exprimer le vecteur accélération $\overrightarrow{a}(O_3/R_0)$ dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)

Cinétique (5,5 points)

6. Calculer le moment cinétique du solide « 2 » dans son mouvement par rapport au repère R_0 exprimé au point O_2 : $\overrightarrow{\sigma_{O_2}}(2/R_0)$ en projection dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
7. Expliquer les particularités de la matrice d'inertie du solide « 3 » en O_3 . (1 point)
8. Calculer le moment cinétique de la table « 3 » dans son mouvement par rapport au repère R_0 exprimé au point O_3 : $\overrightarrow{\sigma_{O_3}}(3/R_0)$ en projection dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
9. Calculer le moment dynamique du solide « 2 » dans son mouvement par rapport au repère R_0 exprimé au point O_2 : $\overrightarrow{\delta_{O_2}}(2/R_0)$ en projection dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ En déduire le torseur dynamique $\{D(2/R_0)\}$ réduit au point O_2 et exprimé dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
10. Calculer le moment dynamique de la table « 3 » dans son mouvement par rapport au repère R_0 exprimé au point O_3 : $\overrightarrow{\delta_{O_3}}(3/R_0)$ en projection dans . En déduire le torseur dynamique $\{D(3/R_0)\}$ réduit au point O_3 et exprimé dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1,5 points)

Dynamique (11 points)

Nous étudions les déplacements rapide de la machine, aucun contact entre la fraise et la pièce n'ayant lieu dans ce cas.

11. Tracer le graphe des liaisons pour la table de la machine. Vous supposerez connues toutes les lois de mouvement calculées par le directeur de commande numérique : $y(t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Elles sont imposées par des moteurs (linéaires sur l'axe Y, rotatif sur les axes B et C), et génèrent des forces motrice (F_y), et couples moteurs (C_B et C_C) inconnus au niveau des moteurs.

Analyser le problème complet : quelles sont les inconnues, combien espérez vous obtenir d'équations ?
Faire le bilan, conclure. (2 points)

12. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la table « 3 ». Ecrire les équations au point O_3 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ permettant de déterminer les inconnues d'efforts dans la liaison pivot en O_2 + le couple C_c en fonction de $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $y(t)$, de leurs dérivées et des données de l'énoncé. (3,5 points)
13. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{\text{« 2 »} + \text{« 3 »}\}$. Ecrire les équations au point O_2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ permettant de déterminer les inconnues d'efforts dans la liaison pivot en O_1 + le couple C_b en fonction de $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $y(t)$, de leurs dérivées et des données de l'énoncé. (4,5 points)
14. Question bonus : S'il vous reste du temps : Résoudre les équations obtenues en question 12 et 13. (1 point)

Étude d'un système d'embrayage centrifuge

Sur les systèmes à moteurs thermiques, (tronçonneuse, motobineuse, taille haie,...) il est souvent nécessaire d'avoir un système permettant de démarrer le moteur à bas régime sans entraîner la charge, puis d'accoupler la charge uniquement lorsque le moteur monte en régime.

Un tel système d'embrayage est généralement constitué comme celui décrit ci dessous que nous allons étudier. Le moyeu 1 de celui-ci est monté sur le moteur, et, lorsque le système est embrayé, il entraîne ici une courroie « poly-V » qui s'enroule sur la cloche repère « 6 ». Le solide « 3 » est monté serré dans le moyeu et le solide « 2 » est en liaison glissière par rapport à l'ensemble {1+3} (la rotation est en fait bloquée par les ressorts).

Une garniture repéré « 5 » est collée sur le solide « 2 » et vient, lorsque la force centrifuge est suffisante, frotter sur le moyeu 6 puis y adhérer pour effectuer la liaison complète.

La cloche « 6 » est par ailleurs en liaison pivot relativement au moyeu « 1 » (non représentée sur le schéma ci dessus)

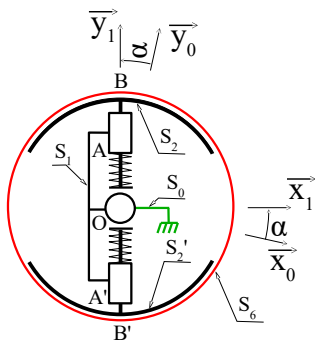
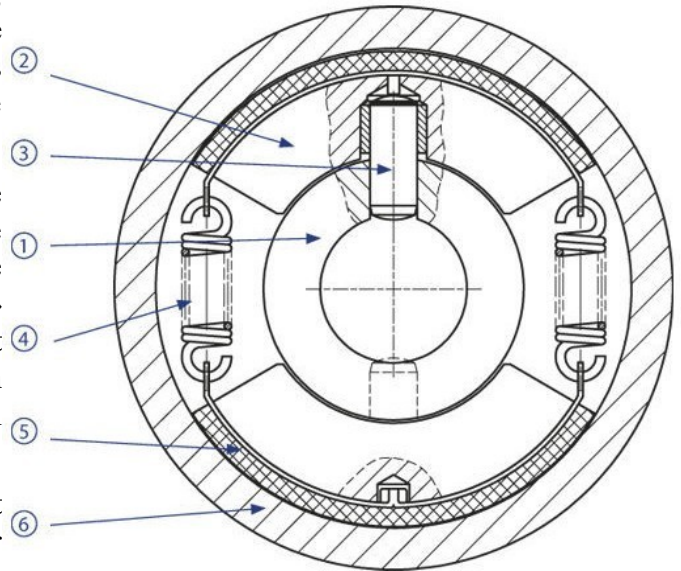


Figure 6: Schéma technologique retenu

La schématisation adoptée est la suivante

Le référentiel galiléen R_0 est lié à S_0

Le solide S_1 est en mouvement de rotation de centre O , d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$, d'angle α relativement au référentiel R_0 . Sa masse est m_1 , son centre d'inertie appartient à

l'axe $(O, \vec{z}_1)$ et sa matrice d'inertie est $I(O,1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$ Au solide S_1

est associé un référentiel $R_1: (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Le solide S_2 est en liaison glissière de centre A et d'axe $\vec{y}_1$ relativement au référentiel R_1 . Sa masse est m_2 , son centre d'inertie est en A , et sa matrice

d'inertie est $I(A,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Le solide S_6 est en liaison pivot de centre O d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_6$, d'angle β relativement au référentiel R_0 . Sa masse

est m_6 , son centre d'inertie appartient à l'axe $(O, \vec{z}_6)$ et sa matrice d'inertie est $I(O,6) = \begin{pmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Au solide S_6 est associé un référentiel $R_6: (O, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$

Les solides S_2 et S_6 sont en contact supposé ponctuel d'axe $\vec{y}_1$ au point B . A ce contact est associé un coefficient de frottement f . Ce contact n'est pas permanent, il dépend des phases de fonctionnement. Lorsque ce contact est effectif, on supposera être en limite de glissement, et nous pourrions donc écrire que l'effort tangentiel T est égal au coefficient de frottement multiplié par l'effort normal.

On supposera : $\vec{OA} = y\vec{y}_1$, $\vec{OB} = (y+b)\vec{y}_1$, le rayon de la cloche 6 est r_6 . La longueur y est un paramètre variable, les autres dimensions sont fixes.

Un ressort de rappel est inséré entre les solides 1 et 2. exerce une force $F = -k(y - l_0)\vec{y}_1$

Le solide S_2' est l'exact symétrique du solide « 2 ». L'étude d'un seul des deux solides est donc nécessaire pour étudier le mécanisme.

Questions

1. Faire un graphe des liaisons du mécanisme.
2. Est-il possible d'étudier le problème comme un problème plan ? Justifier. Préciser le plan alors utilisé.
3. Isoler le solide S_2 .
 1. Faire le bilan des actions mécaniques qui lui sont appliquées.
 2. Écrire les torseurs des actions mécaniques correspondantes.
 3. Déplacer tous les torseurs au point A
4. Exprimer le torseur cinématique du solide S_2 relativement au référentiel R_0 réduit au point A et en projection dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $[V(S_2/R_0)]$ en fonction des paramètres du problème
5. Exprimer le torseur cinétique du solide S_2 relativement au référentiel R_0 réduit au point A et en projection dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $[C(S_2/R_0)]$ en fonction des paramètres du problème
6. Exprimer le torseur dynamique du solide S_2 relativement au référentiel R_0 réduit au point A et en projection dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $[D(S_2/R_0)]$ en fonction des paramètres du problème
7. Écrire les six équations du principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S_2 dans son mouvement par rapport à R_0 , centre des moments en A
8. Résoudre ce principe fondamental de la dynamique, pour le cas dans lequel
 - l'embrayage n'est pas encore en action, $[T(6 \rightarrow 1)] = [0]$
 - pour une fréquence de rotation du rotor stabilisée ($\dot{\alpha} = \text{constante}$).
 - En supposant stabilisée la position de la masselotte ($\dot{y} = 0$),
 en déduire la valeur de y en fonction de $\dot{\alpha}$
9. $\vec{OB} = (y+b)\vec{y}_1$ et $\vec{OB}_{\max} = r_6\vec{y}_1$. Exprimer alors la valeur de $\dot{\alpha}$ pour laquelle $\vec{OB} = \vec{OB}_{\max}$ (c'est la fréquence de rotation pour laquelle l'embrayage commence à faire effet)
10. On suppose maintenant que l'embrayage est en action.
 - $\vec{OB} = r_6\vec{y}_1$
 - la fréquence de rotation du rotor est stabilisée ($\dot{\alpha} = \text{constante}$)
 - l'embrayage est en limite de glissement (au niveau du contact ponctuel en B la force tangentielle est égale au produit du coefficient de frottement par la force normale).
 Résoudre le principe fondamental de la dynamique pour trouver les composantes du torseur $[T(6 \rightarrow 2)]$
11. En tenant compte du fait qu'il y a deux masselottes, exprimer le couple transmissible par l'embrayage à la limite de glissement.
12. Application numérique :
 - $r_6 = 100 \text{ mm}$;
 - $b = 15 \text{ mm}$;
 - $l_0 = 75 \text{ mm}$
 - $A_1 = 0,0001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $C_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 - $A_2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $B_2 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $C_2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 - $A_6 = 0,028 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $C_6 = 0,049 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 - $k = 5 \text{ N/mm}$;
 - $m_1 = 1 \text{ kg}$;
 - $m_2 = 0,2 \text{ kg}$;
 - $m_6 = 4,975 \text{ kg}$;
 - $f = 0,3$

1. à partir des résultats de la question 9, calculer la vitesse de rotation pour laquelle l'embrayage commence à faire effet. Donner le résultat en tr/min
2. à partir de la question 11, calculer le couple transmissible par l'embrayage pour $N=3000$ tr/min

Équilibrage :

Les usinages nécessaires pour fabriquer la cloche ont déséquilibré cette dernière : son centre d'inertie est maintenant G tel que $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,085 \\ 19,382 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)} (mm)$ et sa matrice d'inertie en O est

$$I(O,6) = \begin{pmatrix} 0,028 & 0 & 0 \\ 0 & 0,028 & -1,911 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -1,911 \cdot 10^{-5} & 0,001 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} (kg \cdot m^2)$$

La jante est assimilée au solide ci-dessous

l'équilibrage sera effectué par un seul perçage sur le flanc de la jante, sur un diamètre 215 mm. Le matériau est de l'acier de masse volumique 7860 kg/m^3 .

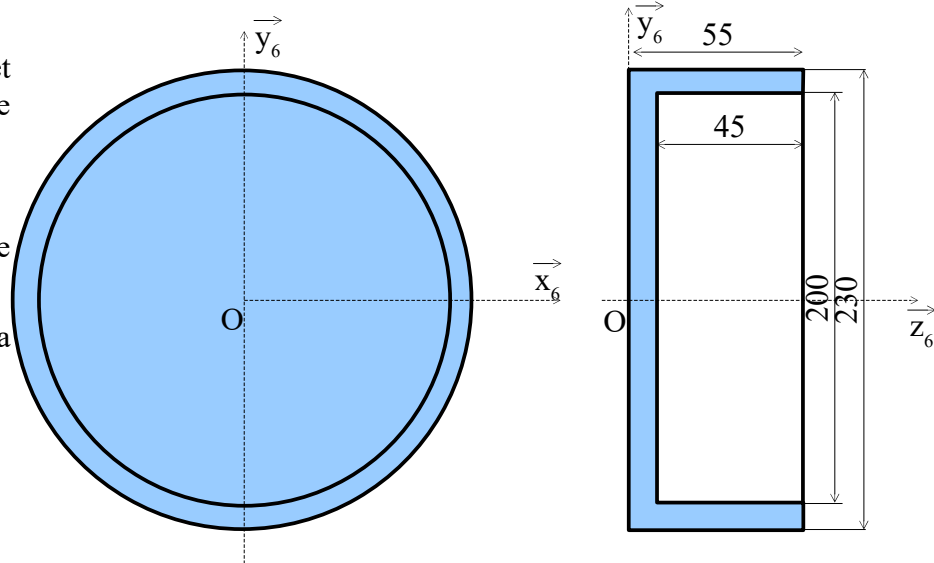
1. Dans quel plan doit se situer la masselotte (ou l'enlèvement de matière)
2. Écrire la condition d'équilibrage statique permettant d'équilibrer la jante
3. Écrire la condition d'équilibrage dynamique permettant d'équilibrer la jante
4. Résoudre et donner

la longueur du trou à effectuer, et
la face à partir de laquelle
effectuer le trou

la valeur de la masse à enlever

les coordonnées du centre d'inertie de
la masse à enlever

le diamètre du trou à percer et sa
longueur.



Trottinette électrique...

Le sujet porte sur l'analyse dynamique et énergétique d'une trottinette électriques telle que décrite ci dessous.

Étude de stabilité globale

Le point A est le point de contact de la roue avant avec le sol, le point B est le point de contact de la roue arrière avec le sol et le point G est le centre d'inertie de l'ensemble utilisateur + trottinette. L'angle alpha représente l'angle que fait la route avec la verticale, (pente en % = $\tan(\alpha)$). on appelle f le coefficient de frottement roue/sol et δ le coefficient de résistance au roulement (en mm)

On suppose que $\overrightarrow{AB} = -e \cdot \vec{x}$ et que $\overrightarrow{AG} = -\frac{e}{2} \cdot \vec{x} + h \vec{y}$.

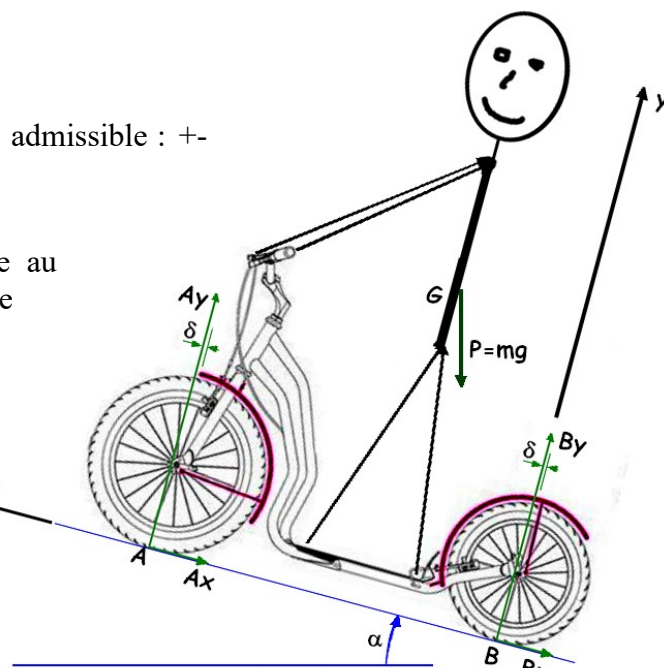
Données numériques :

$m=120$ kg, $g=10$ m/s² ; $e=1$ m, $h=1,1$ m, pente maximale admissible : ± 6 %

$\delta = 1$ mm $f = 0,6$

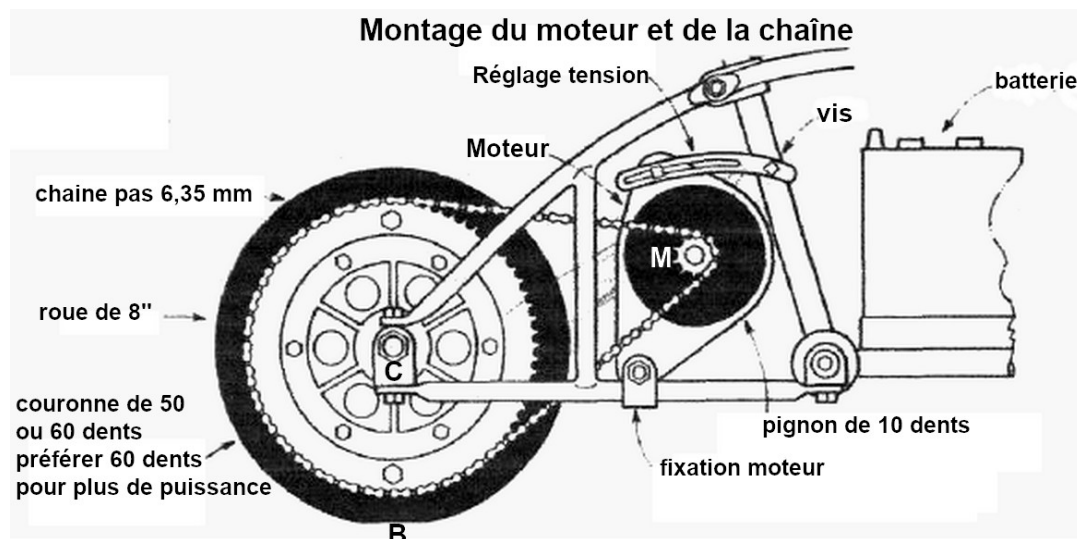
On s'intéresse ici au non basculement de la trottinette au freinage. La trottinette est supposé se déplacer en ligne droite à une vitesse $\vec{V} = \dot{x} \vec{x}$

1. Calculer le torseur dynamique de l'ensemble utilisateur+trottinette au point G.
2. Écrire le théorème du moment dynamique appliqué à l'ensemble utilisateur + trottinette calculé au point A. En déduire la décélération maximale au freinage pour ne pas basculer autour de la roue avant dans une pente de -6%)
3. Reprendre le même calcul autour du point B, calculer alors l'accélération maximale pour ne pas basculer autour de la roue arrière (au plat)



Etude de la motorisation

La motorisation est appliquée sur la roue arrière, comme suit :

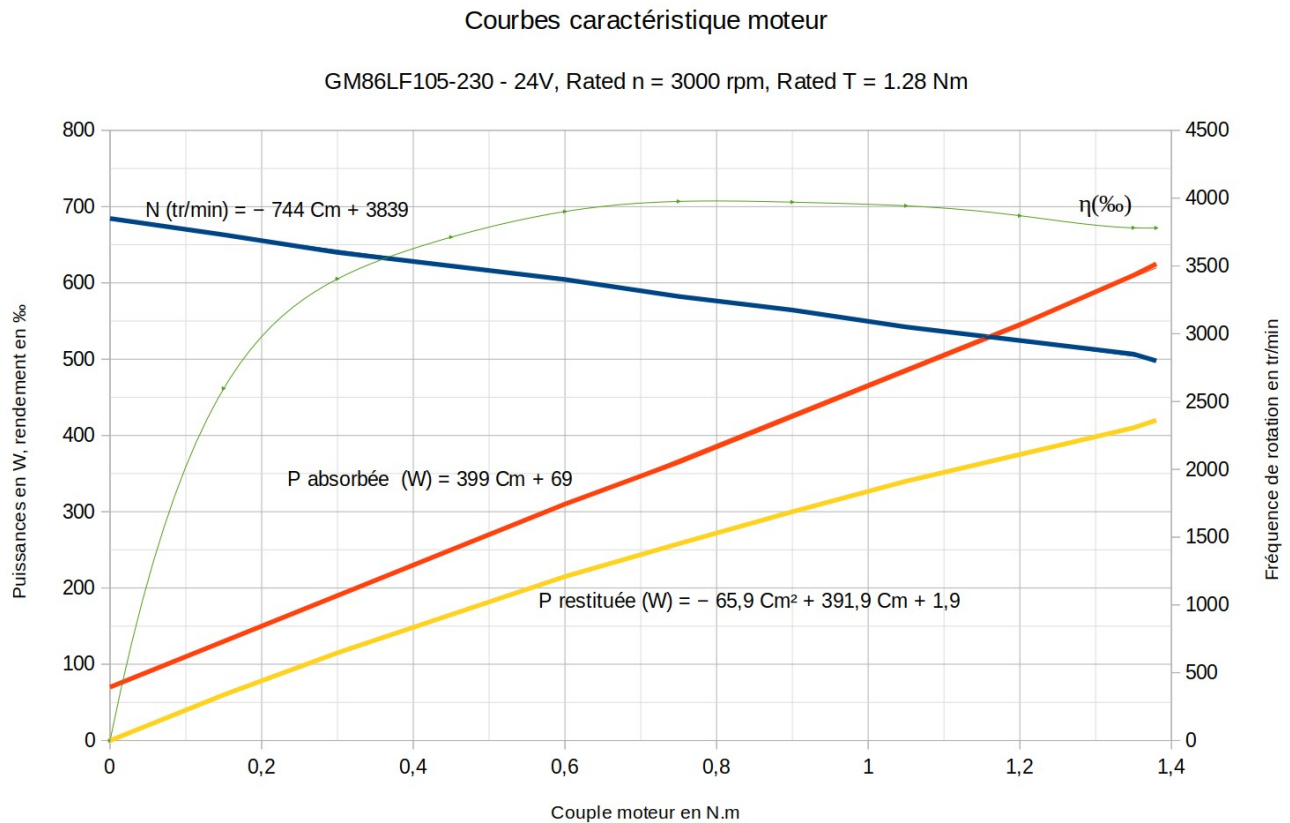


La roue est de rayon R , La roue complète a pour moment d'inertie J_r autour de son axe de rotation. Le nombre de dents de la couronne est Z_R

On supposera un rendement η_c pour la transmission par chaîne. On néglige l'inertie de la chaîne au cours de sa rotation.

J_m est le moment d'inertie du moteur et du pignon autour de son axe de rotation, J_r est le moment d'inertie de la roue autour de son axe de rotation. Le nombre de dents du pignon est Z_p

Les caractéristiques du moteur sont données ci-dessous :



Pour les calculs de cinétique, la résultante cinétique de la roue et celle du moteur sont comptées avec la masse de la trottinette et de son conducteur, vous les prendrez donc nulles à ce stade

4. Exprimer (littéralement) en fonction des données du problème (R , Z_p , Z_r ,...) l'expression
 - de la vitesse de rotation de la roue ω_r en fonction de la vitesse de rotation du moteur ω_m
 - de la vitesse du scooter $\frac{dx}{dt}$ en fonction de la vitesse de rotation du moteur ω_m
5. Exprimer littéralement les torseurs cinématiques s
 - de l'ensemble rotor + pignon relativement au bâti, exprimé au point M centre du pignon moteur
 - de l'ensemble roue arrière (+ couronne), relativement au bâti, exprimé au point C, appartenant à l'axe de la pivot de roue
 - de l'ensemble « trottinette » en translation par rapport au sol
6. Exprimer littéralement les torseurs cinétiques
 - de l'ensemble rotor + pignon relativement au bâti, exprimé au point M centre du pignon moteur

- celui de l'ensemble roue arrière (+ couronne), relativement au bâti, exprimé au point C, appartenant à l'axe de la pivot de roue
- 7. Exprimer littéralement les énergies cinétiques (en fonction uniquement de ω_m , remplacer ω_r et $\frac{dx}{dt}$ par les expressions calculées au point 4)
 - de l'ensemble rotor + pignon relativement au bâti,
 - de l'ensemble roue arrière, relativement au bâti,
 - de l'ensemble « trottinette » en translation par rapport au sol
- Le poids de l'ensemble forme un angle α avec l'axe y tel qu'indiqué sur la figure initiale ;
- la résistance au roulement se caractérise par un décalage δ de la résultante verticale du poids par rapport au centre de la roue (avant comme arrière)
- la pénétration dans l'air crée une force $\vec{F}_v = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \vec{x}$ avec ρ : masse volumique de l'air, S : surface projetée de l'ensemble mobile, et C_x coefficient de pénétration dans l'air
- Le moteur crée un couple moteur sur l'axe du pignon moteur tel qu'indiqué sur le graphe de la page précédente.
- 8. Exprimer littéralement, en fonction des paramètres, les puissances d'actions mécaniques suivantes. (en fonction uniquement de ω_m , remplacer ω_r et $\frac{dx}{dt}$ par les expressions calculées au point 4)
 - du poids sur l'ensemble trottinette + utilisateur dans son mouvement par rapport au sol
 - des réactions d'appui en A et B du sol par rapport au roues dans le mouvement de la trottinette par rapport au sol (les coefficients de frottement et de résistance au roulement étant les mêmes sur les deux roues vous pouvez regrouper les deux puissances en un seul calcul)
 - de la résistance à la pénétration dans l'air dans le mouvement de la trottinette par rapport au sol
- 9. Calculer la puissance des actions mutuelles entre les solides composant la trottinette (moteur, roue, châssis+utilisateur)
- 10. Appliquer alors le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble et exprimer l'accélération angulaire $\dot{\omega}_m$ en fonction des autres paramètres du système.

Vérification des caractéristiques proposées par le constructeur

Les données numériques sont les suivantes :

$m=120 \text{ kg}$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$; $e=1 \text{ m}$; $h=1,1 \text{ m}$; $\delta=1 \text{ mm}$; $f=0,6$;
 $J_r=0,005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; $J_m=0,001 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; $S=0,5 \text{ m}^2$; $C_x=0,7$; $\rho=1,225 \text{ kg/m}^3$; $\tan(\alpha)=\pm 6 \%$

$Z_r=50$ ou 60 dents ; $Z_m=10$ dents ; $R=8$ pouces (rappel : 1 pouce = 2,54 cm) $\eta_c=0,9$

11. Quelle est la vitesse maximale que peut atteindre la trottinette (en fonction de la fréquence maximale de rotation du moteur?)
 - pour $Z_r=50$ dents
 - pour $Z_r=60$ dents
12. La trottinette peut elle gravir la pente de 6 % ? à quelle vitesse ?
 - Avec $Z_r=50$ dents
 - avec $Z_r=60$ dents
13. Départ arrêté, au plat, sans tenir compte de la résistance de l'air, quelle est l'accélération maximale de la trottinette ? Risque elle de faire « un wheeling » (voir question 3) (prendre le plateau de 60 dents)

14. En supposant constante l'accélération précédente, combien de temps faut il pour traverser un carrefour de 20m de large (démarrage au feu vert?).
15. Quelle est alors la vitesse atteinte à la fin du carrefour ?
16. On suppose que la trottinette se déplace au plat, à vitesse constante de 20 km/h, plateau de 50 dents. Quelle est la puissance électrique instantanée consommée (bien prendre en compte le rendement électrique)
17. La batterie est une 24 V 10 Ah soit 240Wh dont seulement 200 Wh sont mobilisable. Quelle est la distance que peut parcourir la trottinette dans les conditions précédemment calculées (20 km/h au plat sans vent)