

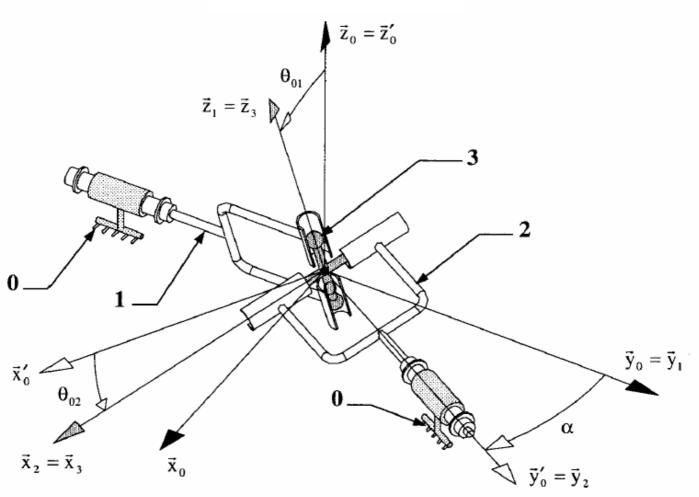
# **IUT de Saint-Etienne**

Département Génie Mécanique et Productique

# Recueil d'exercices de mécanique générale de première année

Module M214 : CINEMATIQUE Module M215 : CINETIQUE

# **Edition 2013**



#### T.D. 1.1.: moteur de modèle réduit

Sur la page suivante sont représentées deux vues du plan d'un moteur de modèle réduit d'avion radio-commandé. Ce moteur deux temps, d'une cylindrée de 10 cm³ et d'une puissance de 1,2 kW, fonctionne avec un mélange à base de méthanol et d'huile de ricin. Sa vitesse de rotation maximum se situe autour de 18000 min<sup>-1</sup>.

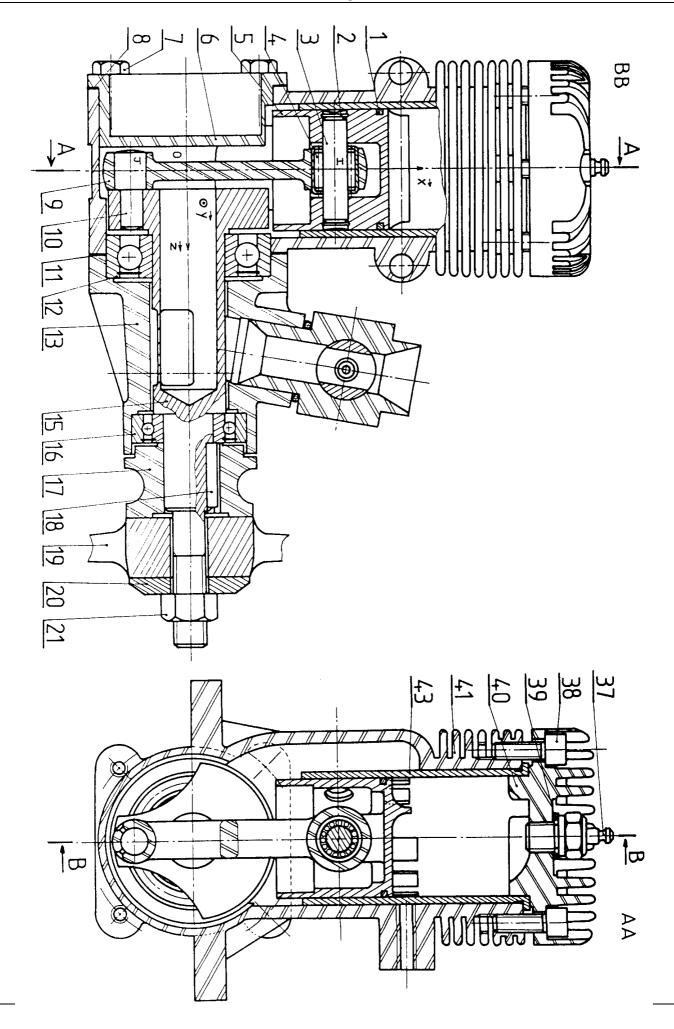
 $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$  est un repère lié au carter 41 du moteur, fixé sur le fuselage de l'avion.

**a-** Après avoir analysé le fonctionnement de ce moteur, identifiez les différentes classes d'équivalence qui interviennent. Matérialisez-les sur le plan en utilisant des couleurs. Recensez les différentes pièces constitutives de ce moteur dans les différentes classes d'équivalence :

Classe d'équivalence	Numéros des pièces qui la compose

<b>b-</b> Ident	ifiez les	liaisons o	qui existent	entre le	es classes	d'équivalenc	e puis construisez	le graphe	minimal de	s liaisons.
-----------------	-----------	------------	--------------	----------	------------	--------------	--------------------	-----------	------------	-------------

- c- Représentez le schéma cinématique spatial, ainsi que la projection plane correspondante dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .
- **e-** Paramètrez ce schéma plan puis déterminez la loi « entrée-sortie » de ce mécanisme, c'est-à-dire la relation que l'on a entre la translation du piston  $\mathbf{5}$  et la rotation de l'arbre  $\mathbf{15}$  en fonction de  $\mathbf{r} = \mathbf{OJ}$  et de  $\mathbf{L} = \mathbf{IJ}$ .
- **f-** Représentez graphiquement la variation de la translation du piston  $\bf 5$  en fonction de la rotation de l'arbre  $\bf 15$  pour un tour. Vous prendrez les valeurs numériques suivantes : r=11 mm et L=40 mm.
- **g-** Déterminez la loi « entrée-sortie » inverse, c'est-à-dire la relation que l'on a entre la rotation de l'arbre 15 et la translation du piston 5 en fonction de r et de L.



#### T.D. 1.2.: pompe hydraulique à pistons axiaux LEDUC

Sur la page suivante est représenté le dessin d'une pompe volumétrique haute pression (300 bars) prévue pour se fixer sur la prise de mouvement des boîtes de vitesses de camions et destinée à alimenter des récepteurs hydrauliques tels que : vérins de bennes, grues de manutention, nacelles élévatrices, étrave de chasse-neige, etc... Il s'agit d'une pompe à pistons axiaux et à barillet fixe. L'arbre 1, portant le plateau came 12, tourne et provoque le mouvement alternatif des pistons 6, rappelés par les ressorts 7. Les pistons sont au nombre de cinq, à 72° les uns des autres. Deux pistons ont été placés dans le plan de coupe pour montrer les positions extrêmes de la course des pistons. Le piston du haut est représenté en fin de phase d'admission (entrée du fluide dans la chambre du piston). Le piston du bas est représenté en fin de phase de refoulement (évacuation du fluide sous pression).

L'arbre 1 porte une plaque 4 qui sert au choix du sens de rotation. Cette plaque est maintenue lors de la rotation par l'intermédiaire d'un pion 11. L'entrée du fluide se fait par un sillon fraisé dans la plaque 4 et le refoulement est obtenu par les clapets anti-retour 9. Chaque piston 6 s'appuie sur la plaque par l'intermédiaire d'un plot en bronze 5. Ces plots sont liés entre eux par une plaque de retenue 16.

**a-** Après avoir analysé le fonctionnement de cette pompe, identifiez les différentes classes d'équivalence qui interviennent. Matérialisez-les sur le plan en utilisant des couleurs. Recensez les différentes pièces constitutives de ce moteur dans les différentes classes d'équivalence :

Classe d'équivalence	Numéros des pièces qui la compose

**b-** Identifiez les liaisons qui existent entre les classes d'équivalence puis construisez le graphe des liaisons.

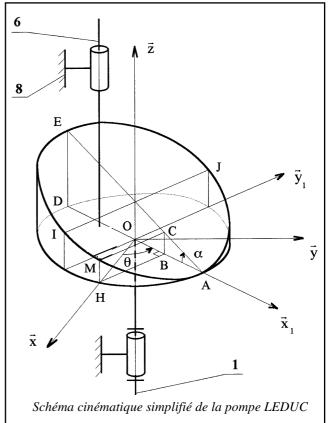
**c-** Afin de déterminer la translation du piston **6** en fonction de la position angulaire de l'arbre **1**, on considère le schéma cinématique paramètré ci-contre.

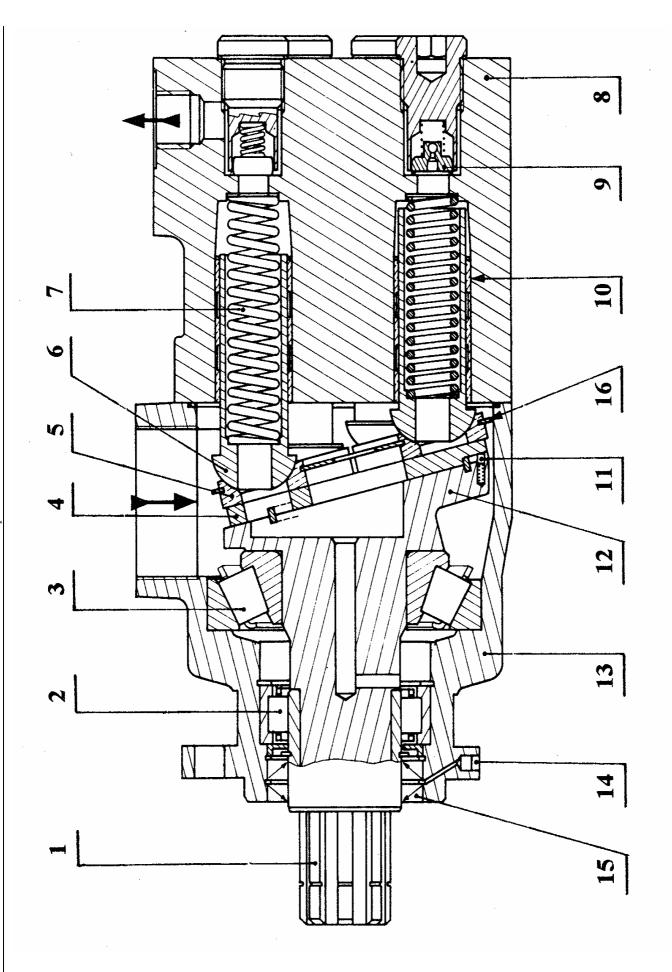
Le repère  $R_0 \left( O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  est lié au barillet **8**. Soit  $R_1 \left( O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$  lié à l'arbre **1**. On pose :  $\theta = \omega t$  où  $\omega$  est la vitesse angulaire, considérée comme constante et exprimée en radians par seconde.

A quelle liaison la liaison entre le piston  $\bf 6$  et le plateau came de l'arbre  $\bf 1$  est-elle équivalente ? Justifiez votre réponse et complétez le schéma cinématique ci-contre.

Vérifiez que les autres liaisons correspondent à celles que vous aviez trouvé précédemment.

Le point M est situé dans le plan  $\left(O,\vec{z}_{\,0}\,,\vec{x}_{\,0}\,\right)$ . On appelle H sa projection sur l'axe  $\left(O,\vec{x}_{\,0}\,\right)$ , telle que : r=OH: distance entre l'arbre moteur et l'axe du piston. On pose z=MH.  $\alpha$  est l'angle d'inclinaison du plateau came par rapport à  $\left(O,\vec{x}_{\,1}\,\right)$ .





- **d-** Exprimez de façon littérale la translation z du piston  $\bf 6$  en fonction de la rotation  $\bf \theta$  de l'arbre moteur.
- e- Déterminez littéralement le débit volumique instantané du piston 6, sachant qu'il refoule le fluide lorsque  $\theta \in [0^{\circ}, 180^{\circ}]$ .
- f- Déterminez le débit volumique instantané de la pompe. Tracez la représentation graphique de ce débit en fonction de  $\theta$  pour un tour de 1. On prendra les valeurs numériques suivantes :

inclinaison du plan du plateau came :  $\alpha = 14^{\circ}$  distance entre l'axe de l'arbre moteur et l'axe du piston : r = 33 mm fréquence de rotation de l'arbre moteur :  $N = 2000 \text{ min}^{-1}$  cylindrée du piston :  $V = 2 \text{ cm}^{3}$ 

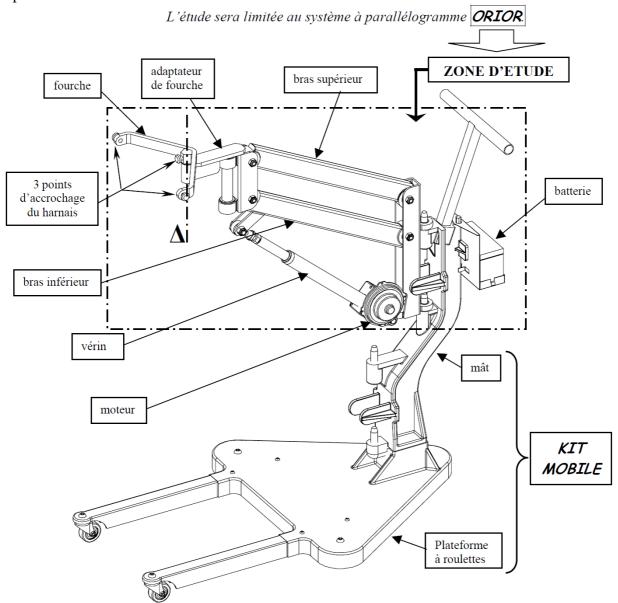
**g-** Calculez le débit volumique moyen de la pompe, en litres par minute, pour une fréquence de rotation de l'arbre moteur  $N = 2000 \text{ min}^{-1}$ .



## Lève personne ORIOR

#### Système étudié:

Fonctionnement : Une tierce personne met en place un harnais qui passe dans le dos et sous les cuisses de la personne à transférer. Le harnais est accroché à la fourche du mécanisme en trois points. La personne peut ainsi être soulevée par l'intermédiaire du système à parallélogramme et déplacée d'un point à un autre par le kit mobile muni de roulettes.



Dans le cadre de cette étude, le bâti sera supposé fixe relativement à un référentiel galiléen.

Le plan du mécanisme est donné en annexes

#### **Questions**

1. Chercher les classes d'équivalence de ce mécanisme

(1 point)

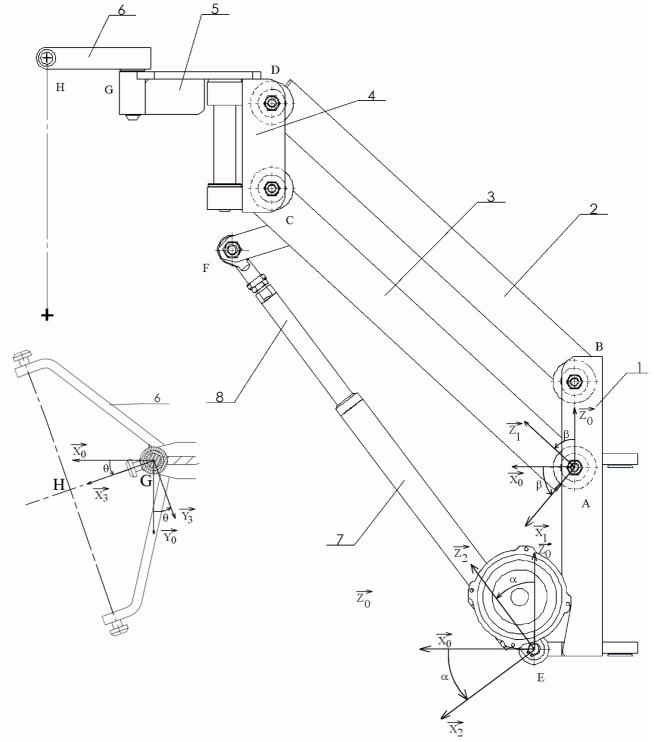
2. Proposer un graphe des liaisons de ce mécanisme

(2 points)

3. Proposer un schéma cinématique de ce mécanisme

- (2 points)
- 4. En se basant sur le schéma ci dessous et sur les données associées écrire la condition de fermeture de la boucle cinématique du triangle AFE (2 point)





 $\overrightarrow{EF} = x(t) \cdot \overrightarrow{z_2} \quad \overrightarrow{AE} = a \cdot \overrightarrow{x_0} - b \cdot \overrightarrow{z_0} \quad \overrightarrow{AF} = c \cdot \overrightarrow{x_1} + d \cdot \overrightarrow{z_1} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = L \cdot \overrightarrow{z_1} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = e \cdot \overrightarrow{z_0} \quad \overrightarrow{DG} = f \cdot \overrightarrow{x_0}$   $\overrightarrow{GH} = g \cdot \overrightarrow{x_3} + h \cdot \overrightarrow{z_3} \quad \text{x(t) et } \theta(\text{t) sont des fonctions continues et infiniment dérivable du temps.}$ 

- 5. En déduire l'équation liant la longueur x du vérin à l'angle  $\beta$  d'inclinaison de la tige AC (écrire  $\beta = f(x)$ ) (3 points)
- 6. En déduire le vecteur AC en projection dans la base « 1 » en fonction de x et des dimensions données ci dessus (1 point)
   Pour la suite des calculs vous garderez β dans les expressions sans le remplacer par sa valeur en fonction de x

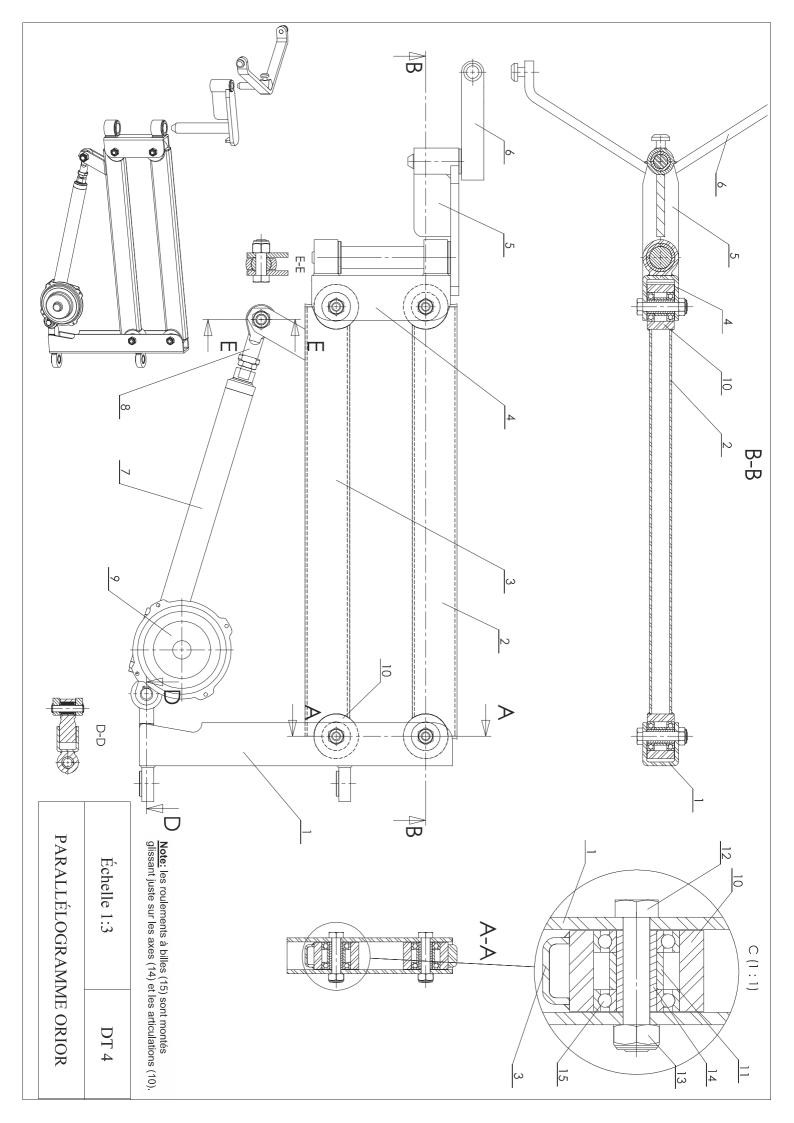
#### Devoir n° 1

DUT GMP Semestre 3

7. Déterminer les vecteurs taux de rotation du bras inférieur, de l'adaptateur de four	che, de la fourche
par rapport au référentiel galiléen	(1,5 points)
8. Déterminer par dérivation la vitesse du point C relativement au référentiel galilée	en (2 point)
9. Donner le torseur cinétique de l'adaptateur de fourche relativement au galilée	en. En déduire la
vitesse du point G relativement au galiléen	(1 point)
10. Comment s'appelle le mouvement du point G relativement au référentiel galiléen	(1 point)
11. Déterminer la vitesse du point H relativement au référentiel galiléen.	(1,5 points)
12. Déterminer l'accélération du point C relativement au référentiel galiléen	(1 point)
13. Déterminer l'accélération du point H relativement au référentiel galiléen	(3 points)

# Nomenclature de l'ensemble

Rep	Nbre	Désignation	Matière	Observation
1	1	base	Al Si 13	
2	1	bras supérieur	Al Si 13	
3	1	bras inférieur	Al Si 13	
4	1	support	Al Si 13	
5	1	adaptateur de fourche	C35	
6	1	fourche	Al Si 13	
7	1	vérin électrique		SKF SKF CAR L 32x200x1FS/D12C
8	1	embout à rotule M12		
9	1	moteur CC		SKF 12V CC, plat, IP44
10	4	articulation	Al Si 13	
11	4	entretoise		
12	5	vis H M10 - 50		
13	5	écrou Nylstop M10		
14	4	axe creux		
15	8	roulement BC 15-32		SKF





#### Conditions d'examen

• Durée : 2 heures

• Documents : interdits à l'exception d'un résumé de cours A4 recto à rendre avec la copie

Calculatrice : autorisée mais inutile

# Étude d'un compresseur d'air

Le système étudié est un compresseur d'air représenté en annexes (source : site de J. Lappare)

1. Chercher les classes d'équivalence de ce mécanisme

(1 point)

Numéros de pièces de la classe d'équivalence

2. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme

(1 point)

3. Proposer un schéma cinématique spatial de ce mécanisme.

(2 points)

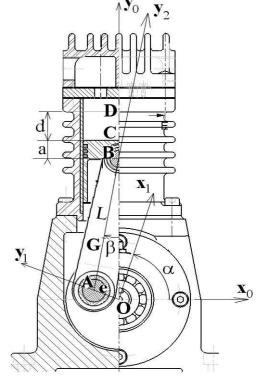
4. Combien de mobilité souhaite on obtenir pour ce mécanisme. Justifier

(1 point)

- 5. Quel est alors le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme. Justifier. (1 point)
- 6. Proposer un schéma cinématique plan de ce mécanisme dans le plan x y (voir fig ci dessous) (1 point)
- 7. En se basant sur le schéma ci dessous et sur les données associées, Exprimer la relation entre l'angle  $\alpha$  et la position du piston d, en fonction de L et de e sachant que d=0 lorsque  $\alpha=0^{\circ}$ . Vous donnerez aussi la relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  (2 points)

Soit

- R<sub>0</sub> le référentiel  $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$  lié au bâti, la base  $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
- R<sub>1</sub> le référentiel  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$  lié au vilebrequin, la base « 1 » étant la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- R<sub>2</sub> le référentiel  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \overline{z_{0,1,2}})$  lié à la bielle, la base « 2 » étant la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

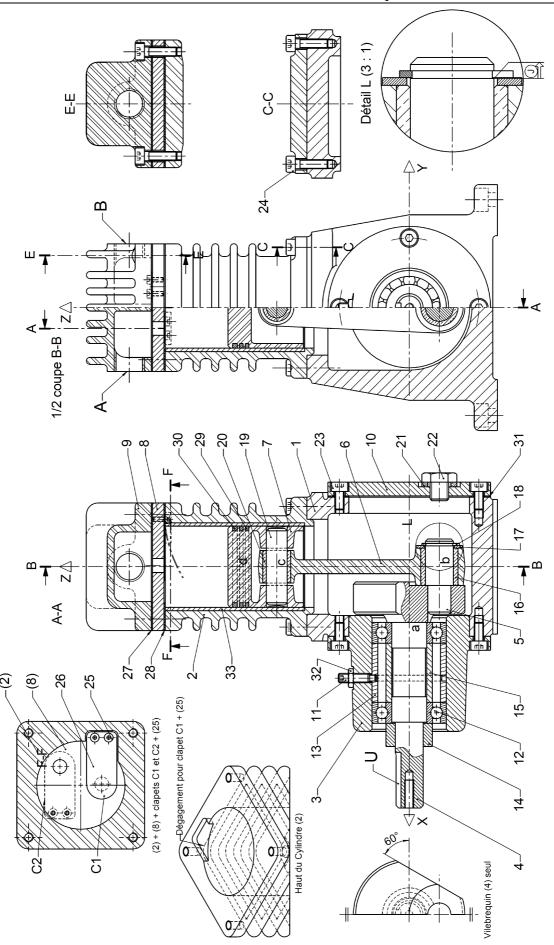




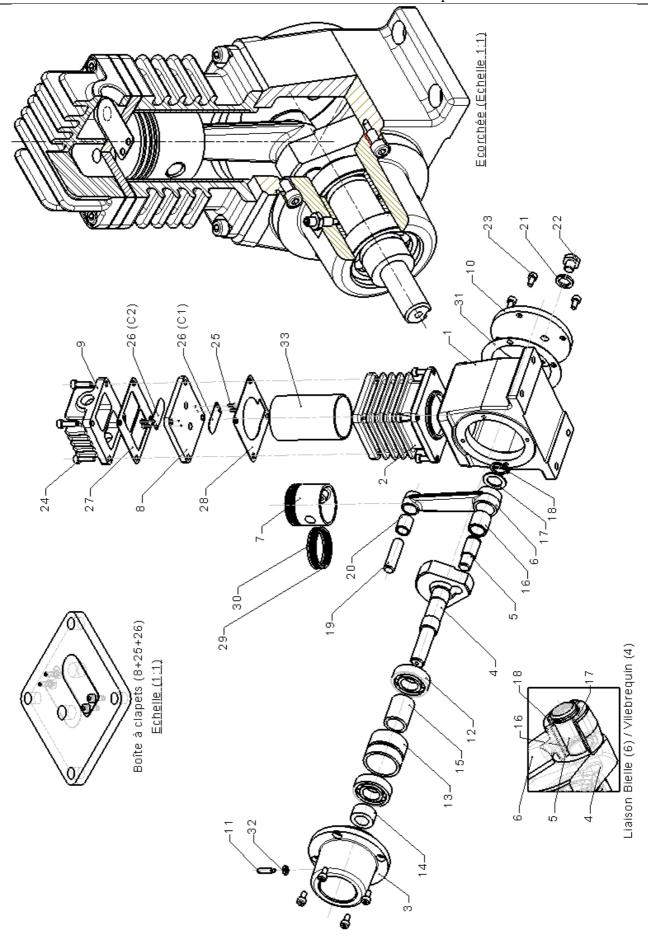
- 8. Faire les schémas plan paramétrés permettant de passer de  $R_0$  à  $R_1$  et de  $R_0$  à  $R_2$ . En déduire les vecteurs taux de rotation  $\Omega(1/0)$  et  $\Omega(2/0)$  (1 point)
- 9. calculer la vitesse du point A relativement au référentiel  $R_0$  en fonction de  $\alpha$  et ses de ses dérivées, et des dimensions des pièces du mécanisme. Le résultat sera exprimé dans la base « 1 » (2 points)
- 10. Calculer la vitesse du point B relativement au référentiel  $R_0$  en fonction de d(t) et des dimensions des pièces du mécanisme. Le résultat sera exprimé dans la base « 0 » (1 point)
- 11. Calculer l'accélération du point A relativement au référentiel R<sub>0</sub>. L'exprimer en fonction de e, L, α et ses dérivées. Le résultat sera exprimé dans la base « 1 » (1 point)
- 12. Écrire le torseur cinématique du vilebrequin relativement au référentiel R<sub>0</sub> réduit au point O (1 point)
- 13. Écrire le torseur cinématique de la bielle, relativement au référentiel  $R_0$  réduit au point A. Le résultat sera exprimé en base « 1 » (1 point)
- 14. En utilisant le torseur précédent, calculer la vitesse du point G relativement à  $R_0$ . (G est le centre d'inertie de la bielle), en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ , e, L. Ne pas chercher à projeter le résultat dans une base particulière, conserver les vecteurs unitaires de différentes bases dans vos résultats. (2 points)
- 15. En utilisant la relation du champ des vecteurs accélération, calculer l'accélération du point G relativement à  $R_0$ . Ne pas chercher à projeter le résultat dans une base particulière, conserver les vecteurs unitaires de différentes bases dans vos résultats. (2 points)

L.G. 2/8 23 février 2009











#### Conditions d'examen

- Durée : 2 heures
- Documents : interdits à l'exception d'un résumé de cours A4 recto simple manuscrit à rendre avec la copie
- Calculatrice : autorisée mais inutile Les téléphones portables et autres appareils électroniques doivent être éteint et rangés dans les sacs. Les sacs seront amenés près du tableau ou au fond de la salle
- Matériel nécessaire : crayon de couleur (8 couleurs), stylo, règle, équerre, compas, crayon papier ou porte mine.

# Étude d'un cric roulant hydraulique

Le système étudié est un cric roulant hydraulique dont le plan est donné en annexes en annexes

1. Chercher les classes d'équivalence de ce mécanisme

(1 point)

Classe d'équivalence (nom)	Numéros de pièces de la classe d'équivalence
0 : Bâti	

2. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme

(2 point)

3. Proposer un schéma cinématique spatial de ce mécanisme.

(2 points)

4. Combien de mobilité souhaite on obtenir pour ce mécanisme. Justifier

(1 point)

5. Quel est alors le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme. Justifier.

(1 point)

6. Proposer un schéma cinématique plan de ce mécanisme dans le plan x - z

(1 point)

- 7. En se basant sur le schéma et sur les vecteurs donnés ci-dessous, Exprimer la hauteur du point F en fonction de l'angle  $\alpha$  (2 points)
- 8. En se basant sur les mêmes données, exprimer la longueur x (longueur du vérin) en fonction de l'angle α et des dimensions constantes du problème (2 points)

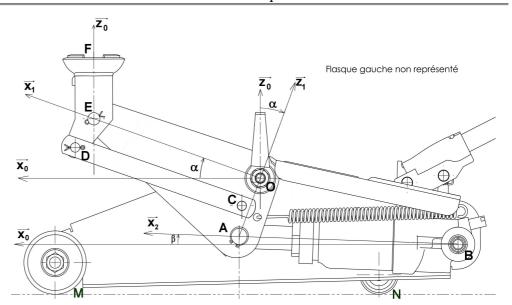
9. en utilisant la formule de trigonométrie ci dessous exprimer l'angle  $\,\alpha$  en fonction de x et des données constantes de l'énoncé

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = R\sin(\theta + \lambda) \text{ avec } R^2 = A^2 + B^2 \text{ et } \lambda = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$
 (2 points)



On appelle référentiel  $R_0$  le référentiel  $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$  lié au bâti « 0 » (pièce 1,2), référentiel  $R_1$  le référentiel  $(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$  lié au bras de levage (pièce 17), référentiel  $R_2$  le référentiel  $(B, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$  lié au corps de vérin (pièce 12), référentiel  $R_3$  le référentiel  $(E, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$  lié à la sellette (pièce 19)

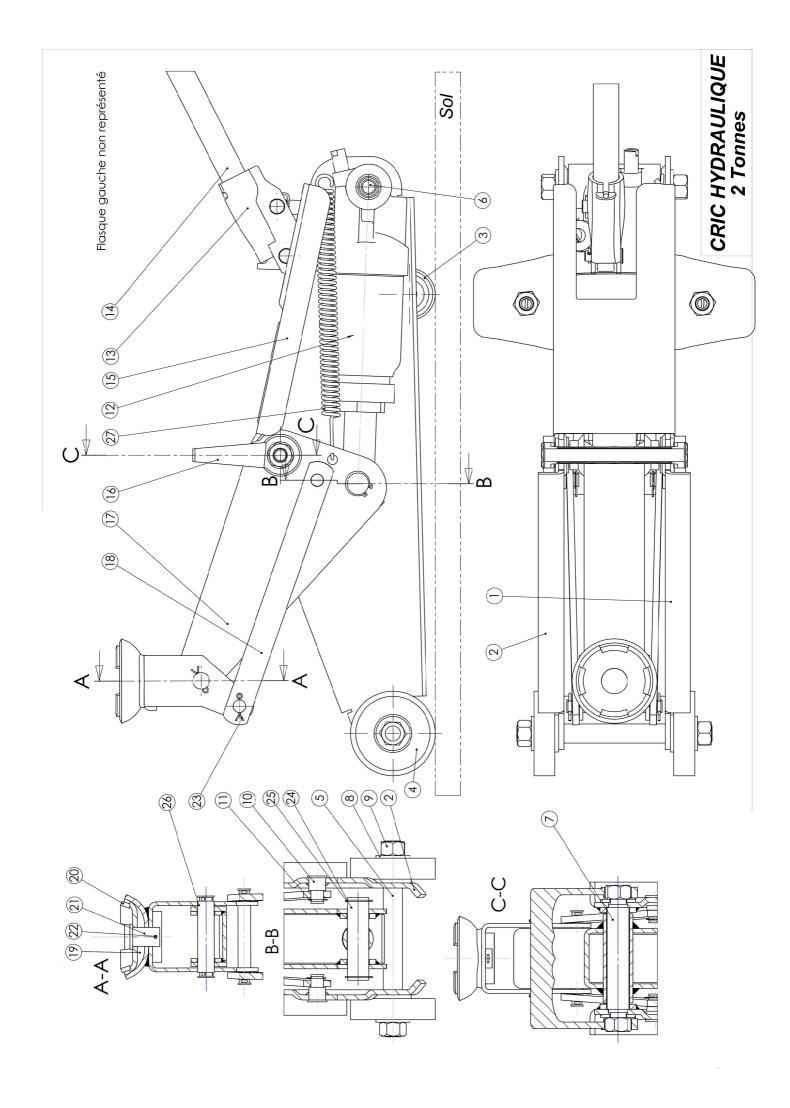
Attention la liaison des biellettes en C est à lire sur la coupe BB



- 10. Faire les schémas plans paramétrés permettant de passer de la base 0 à la base 1 et de la base 0 à la base 2. En déduire les vecteurs  $\Omega(1/0)$  et  $\Omega(2/0)$ , en déduire  $\Omega(2/1)$  (1 point)
- 11. Calculer la vitesse du point E relativement au référentiel 0  $V(E/R_0)$  (1 point)
- 12. Calculer de deux manières différentes la vitesse du point A relativement au référentiel 0  $\overline{V(A/R_0)}$ 
  - 12.1. en dérivant le vecteur  $\overrightarrow{OA}$  relativement au référentiel  $R_0$ . Résultats en projection dans la base 1 (1 point)
  - 12.2. en dérivant le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  relativement au référentiel  $R_0$ . Résultats en projection dans la base 2 (1 point)
- 13. Calculer l'accélération du point E relativement au référentiel  $R_0 = \overline{a(E/R_0)}$  (1 point)
- 14. Exprimer le torseur cinématique du référentiel  $R_3$  (solide 19) relativement au référentiel  $R_0$  exprimé au point E, résultats en projection dans la base 1 (1 point)
- 15.En déduire la vitesse du point F relativement au référentiel R<sub>0</sub>. Quelle est la trajectoire de F? (1 point)

#### Nomenclature

N°	Nom	N°	Nom	N°	Nom	N °	Nom
1	Support de roue gauche	8	rondelle	15	cache	22	goupille
2	Support de roue droit	9	écrou	16	poignée	23	goupille
3	Roue arrière	10	Axe de biellette	17	Bras de levage	24	Axe de piston
4	Roue avant	11	Anneau élastique	18	biellette	25	Anneau élastique
5	Axe de roues	12	Corps de vérin	19	Sellette	26	Axe de sellette
6	Axe de corps de vérin	13	Commande de pompe à huile	20	Support de véhicule		
7	Axe de bras de levage	14	Levier de commande	21	Axe de support de véhicule		



## T.D. 2.1.: manipulateur pneumatique

On considère le manipulateur pneumatique représenté par le schéma cinématique paramètré ci-dessous :

Paramètres géométriques constants liés aux solides :

bras :  $\overrightarrow{BC} = a\vec{x}_3$ 

poignet :  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{by}_5$ 

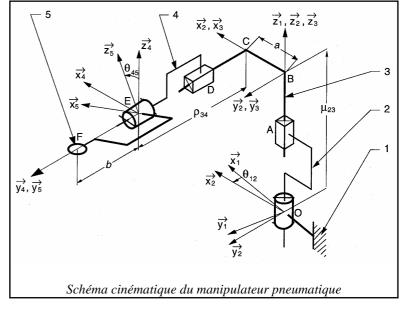
Paramétrage des liaisons :

 $L_{12}$ : liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$ :  $\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ 

 $L_{23}$ : liaison glissière d'axe  $(A, \vec{z}_2)$ :  $\overrightarrow{OB} = \mu_{23} \vec{z}_3$ 

 $L_{34}$ : liaison glissière d'axe  $(D, \vec{y}_3)$ :  $\overrightarrow{CE} = \rho_{34} \vec{y}_4$ 

 $L_{45}$ : liaison pivot d'axe  $(E, \vec{y}_4)$ :  $\theta_{45} = (\vec{x}_4, \vec{x}_5)$ 



Repères associés aux solides :

 $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié au socle 1 (partie fixe)

 $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié au support 2 ( $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ )

 $R_{3}\!\left(B,\vec{x}_{3},\vec{y}_{3},\vec{z}_{3}\right) \text{ est li\'e au bras 3 (} \vec{x}_{3}=\vec{x}_{2}\,,\; \vec{y}_{3}=\vec{y}_{2}\,,\; \vec{z}_{3}=\vec{z}_{2}\,)$ 

 $R_4\big(E, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4\big) \text{ est li\'e à l'avant-bras 4 (} \vec{x}_4 = \vec{x}_3, \ \vec{y}_4 = \vec{y}_3, \ \vec{z}_4 = \vec{z}_3)$ 

 $R_5(E, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  est lié au poignet  $5 (\vec{y}_4 = \vec{y}_5)$ 

**a-** Déterminer les vecteurs instantanés de rotation :  $\vec{\Omega} \left( R_2 / R_1 \right)$  et  $\vec{\Omega} \left( R_5 / R_4 \right)$ .

**b-** Calculer le vecteur vitesse de B dans  $R_1: \vec{V}(B/R_1)$ .

c- Calculer le vecteur vitesse de C dans  $R_1$ :  $\vec{V}(C/R_1)$ . Vérifier ce résultat par une composition des vitesses utilisant le repère  $R_2$ .

 $\mbox{\bf d-}$  Calculer le vecteur vitesse de E dans  $R_3: \ \vec{V} \big( E \, / \, R_3 \big)$  .

e- Calculer le vecteur accélération de B dans  $R_1:\ \overline{a}\big(B\,/\,R_1\big)$  .

 ${f f}$ - Calculer le vecteur accélération de C dans  $R_1$ :  $\vec{a} \Big( C / R_1 \Big)$ . Vérifier ce résultat par une composition des accélérations utilisant le repère  $R_2$ .

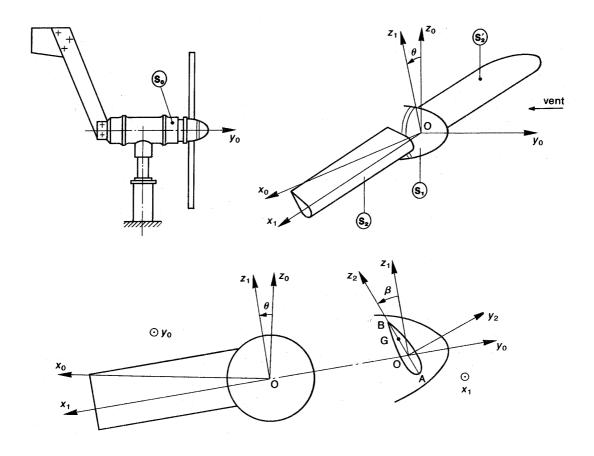
**g-** Calculer le vecteur accélération de E dans  $R_3$  :  $\vec{a} \left( E \, / \, R_3 \right)$  .

h- Définir les torseurs cinématiques suivants par leurs éléments de réduction :

•  $\left\{ V_{\left(S_{2} / R_{1}\right)} \right\}$  réduit au point O.

•  $\left\{ V_{\left(S_4 / R_3\right)} \right\}$  réduit au point E.

#### T.D. 2.2.: aérogénérateur



La figure ci-dessus représente le corps  $(S_0)$  d'un aérogénérateur à hélice bipale muni d'un empennage lui permettant de s'orienter dans le lit du vent. Soit  $R_0 \left( O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  un repère lié au corps  $(S_0)$ . Le rotor  $(S_1)$  entraîne un alternateur électrique situé dans le corps  $(S_0)$  et a une liaison pivot d'axe  $\left( O, \vec{y}_0 \right)$  avec celui-ci. Soit  $R_1 \left( O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1 \right)$  un repère lié à  $(S_1)$ . On pose  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ , avec  $\theta = \omega$ .t et  $\omega = 120$  rad/s.

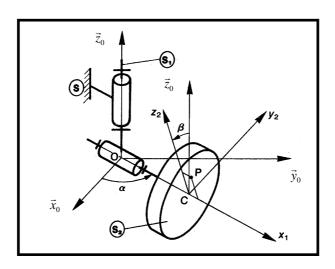
Par fort vent un dispositif de mise en drapeau permet aux pales de l'hélice de pivoter autour de l'axe  $\left(O,\vec{x}_1\right)$ . Soit  $R_2\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2\right)$  un repère lié à la pale  $(S_2)$  tel que l'axe  $\left(O,\vec{z}_2\right)$  soit dirigé selon la droite de référence AB de la pale. On pose  $\beta=\left(\vec{z}_1,\vec{z}_2\right)$ . En fonctionnement normal, l'angle de calage  $\beta=20^\circ$ . Soit G le centre d'inertie de la pale  $(S_2)$ , tel que :  $\overrightarrow{OG}=a\vec{x}_1+c\vec{z}_2$  avec a=160 mm et c=13 mm.

- a- Réaliser le schéma cinématique spatial de ce mécanisme.
- **b-** Déterminer la norme du vecteur vitesse du point G par rapport au bâti  $R_0$ :  $\|\vec{V}(G/R_0)\|$  lorsque l'angle  $\beta$  reste égal à  $20^\circ$ .
- **c-** Déterminer la norme du vecteur accélération du point G par rapport au bâti  $R_0$ :  $\|\vec{a}(G/R_0)\|$  lorsque l'angle  $\beta$  reste égal à  $20^{\circ}$ .

#### T.D. 2.3. : équilibreuse de roue de véhicule (extrait du D.S. n°1 de 1996)

Le schéma cinématique d'une équilibreuse de roue de véhicule est donné ci-dessous. Soit  $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$  un repère lié au bâti (S) de l'équilibreuse. Le bras (S<sub>1</sub>) a une liaison pivot d'axe  $(O,\vec{z}_0)$  avec (S). Soit  $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$  un repère lié à (S<sub>1</sub>).

On pose  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . La roue  $(S_2)$  de centre C a une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_1)$  avec  $(S_1)$ . Soit  $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  un repère lié à la roue  $(S_2)$  tel que  $\overrightarrow{OC} = r\vec{x}_1$  (r constante positive).



On pose  $\beta(t) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ . Lorsque la roue n'est pas équilibrée, les effets dynamiques font varier l'angle  $\alpha$  entre deux bornes qui peuvent être mesurées. Afin de supprimer cette variation, des masselottes appropriées sont placées sur la périphérie de la jante. Une masselotte d'équilibrage est assimilée à un point P, dont la position dans  $R_2$  est définie par :  $\overrightarrow{CP} = a\vec{x}_1 + c\vec{z}_2$ , a et c étant des constantes positives.

- **a-** Faîtes les deux schémas plans paramètrés visualisant les passages de  $R_0$  à  $R_1$  et de  $R_1$  à  $R_2$ .
- **b-** Exprimez les vecteurs instantanés de rotation :  $\vec{\Omega} \left( R_1 / R_0 \right)$  et  $\vec{\Omega} \left( R_2 / R_0 \right)$ .
- **c-** Exprimez le vecteur vitesse du point P par rapport au bâti (S) :  $\vec{V}(P/R_0)$ .
- **d-** Exprimez le vecteur accélération du point P par rapport au bâti (S) :  $\vec{a}(P/R_0)$ .

# T.D. 2.4.: pompe hydraulique à pistons axiaux LEDUC (suite)

Reprenons le T.D. 2.2. dans lequel nous avions modélisé une partie de la pompe à pistons axiaux LEDUC par le schéma cinématique simplifié ci-dessous.

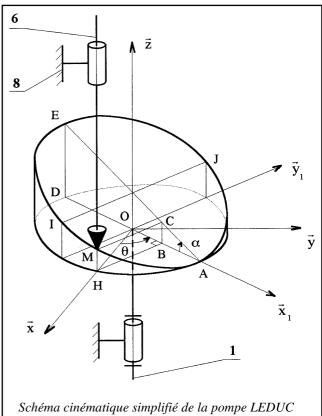
On rappelle que  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au barillet  $\mathbf{8}$ ,  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre  $\mathbf{1}$ . La rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  est repérée par  $\theta$  tel que  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

Le mouvement du piston  $\mathbf{6}$  est repéré par la cote z = HM du point M appartenant à  $\mathbf{6}$ , avec (résultat du T.D. 2.2.):



**a-** Déterminez le vecteur vitesse du point M par rapport au bâti  $R_0$ :  $\vec{V}(M/R_0)$ . Vous exprimerez ce vecteur dans le repère  $R_0$ , puis dans le repère  $R_1$ .

**b-** Déterminez le vecteur accélération du point M par rapport au bâti  $R_0$ :  $\vec{a}(M/R_0)$ . Vous exprimerez ce vecteur dans le repère  $R_0$ , puis dans le repère  $R_1$ .



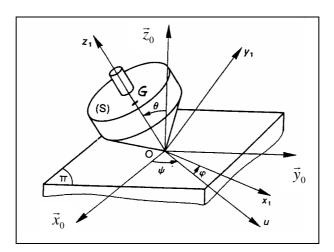
c- Déterminez les vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au bâti  $R_0$ :  $\vec{V}(M/R_0)$  et  $\vec{a}(M/R_0)$  dans le cas particulier où  $\theta = \omega t$ :  $\omega$  est la vitesse angulaire, considérée comme constante et exprimée en radians par seconde. Vous exprimerez ces vecteurs successivement dans les repères  $R_0$  et  $R_1$ .

**d-** <u>Application numérique</u> : calculez les vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au bâti  $R_0: \vec{V}(M/R_0)$  et  $\vec{a}(M/R_0)$  dans le cas particulier où  $\theta = \omega t$ . Vous prendrez :

 $\begin{array}{ll} \text{inclinaison du plan du plateau came}: & \alpha = 14^{\circ} \\ \text{distance entre l'axe de l'arbre moteur et l'axe du piston}: & r = 33 \text{ mm} \\ \text{fréquence de rotation de l'arbre moteur}: & N = 2000 \text{ min}^{-1} \\ \text{cylindrée du piston}: & V = 2 \text{ cm}^{3} \end{array}$ 

#### T.D. 2.5.: toupie (extrait du D.S. n°2 de1997)

Soit  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère lié à la surface plane  $\boldsymbol{0}$  située dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . L'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est dirigé suivant la verticale ascendante.



Une toupie 1, animée d'un mouvement de rotation rapide autour de son axe de symétrie, est lancée sur la surface plane 0, de telle façon que sa pointe reste constamment confondue avec l'origine O du repère  $R_0$ . Soit  $R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$  un repère lié à la toupie 1. L'axe  $\left(O,\vec{z}_1\right)$  est disposé suivant l'axe de symétrie de la toupie. Le paramétrage angulaire de la base  $R_1$  par rapport à la base  $R_0$  est effectué par les trois angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . On note  $B'\left(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0\right)$  la première base intermédiaire et  $B''\left(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1\right)$  la seconde base intermédiaire.

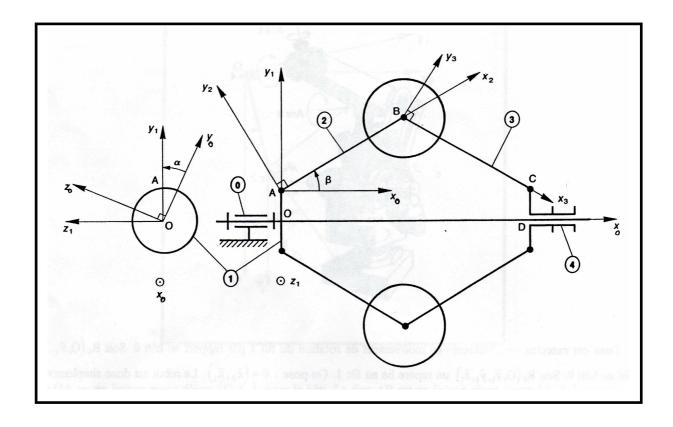
La position du centre de gravité G de la toupie 1 est défini par :  $\overrightarrow{OG} = h \vec{z}_1$ 

- a- Faîtes les trois schémas plans paramètrés visualisant les passages de R<sub>0</sub> à R<sub>1</sub>.
- **b-** Exprimez  $\vec{V}(G/0)$ .
- **c-** Exprimez  $\vec{a}(G/0)$ .

Pour les questions b. et c., il n'est pas nécessaire de projeter le résultat dans une base particulière.

#### T.D. 2.6.: régulateur à boules

Soit  $R_0 ig( O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 ig)$  un repère lié au bâti 0 d'un régulateur à boules schématisé ci-dessous.



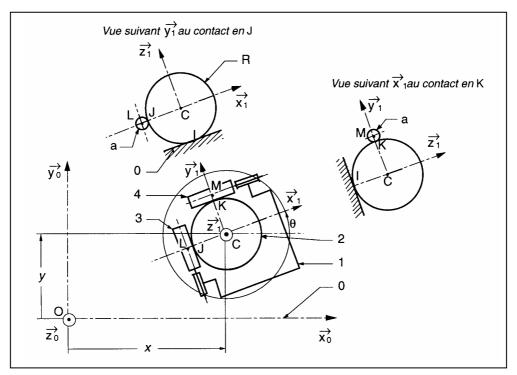
Le corps  $\mathbf{1}$  a une liaison pivot d'axe  $\left(O,\vec{x}_{0}\right)$  avec  $\mathbf{0}$ . Soit  $R_{1}\left(O,\vec{x},\vec{y}_{1},\vec{z}_{1}\right)$  un repère lié à  $\mathbf{1}$ . On pose :  $\alpha(t) = \left(\vec{y}_{0},\vec{y}_{1}\right)$ Le levier  $\mathbf{2}$  a une liaison pivot d'axe  $(A,\ \vec{z}_{1})$  avec  $\mathbf{1}$ . Soit  $R_{2}\left(A,\vec{x}_{2},\vec{y}_{2},\vec{z}_{2}\right)$  un repère lié à  $\mathbf{2}$ . On pose :  $\overrightarrow{OA} = r\,\vec{y}_{1}\ (r>0)$  et  $\beta(t) = \left(\vec{x}_{0},\vec{x}_{2}\right)$ .

Le levier  $\bf 3$  a une liaison pivot d'axe  $(B, \ \vec{z}_1)$  avec  $\bf 1$ . Soit  $R_3 \left( B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 \right)$  un repère lié à  $\bf 3$ . On pose :  $\overrightarrow{AB} = L \vec{x}_2$  (L>0). La pièce  $\bf 4$  a une liaison pivot glissant d'axe  $\left( O, \vec{x}_0 \right)$  avec  $\bf 0$ . Soit  $R_4 \left( D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$  un repère lié à  $\bf 4$ . Le point D est situé sur l'axe  $\left( O, \vec{x}_0 \right)$ . La pièce  $\bf 4$  a une liaison pivot d'axe  $(C, \ \vec{z}_1)$  avec  $\bf 3$ . On pose :  $\overrightarrow{DC} = r \ \vec{y}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = L \ \vec{x}_3$ .

- **a-** Déterminer les vecteurs instantanés de rotation :  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/0)$ ,  $\vec{\Omega}(3/2)$  et  $\vec{\Omega}(3/0)$ .
- $\textbf{b-} \ \text{Calculer les vecteurs vitesse du point } B: \quad \vec{V}\big(\,B\,/\,1\big)\,, \quad \vec{V}\big(\,B\in 1\,/\,0\big)\,, \quad \vec{V}\big(\,B\,/\,0\big)\,.$
- **c-** Calculer les vecteurs vitesse du point  $C: \vec{V}(C/2), \vec{V}(C \in 2/0), \vec{V}(C/0)$ .
- **d-** Calculer les vecteurs accélération du point B:  $\vec{a}(B/1)$ ,  $\vec{a}(B \in 1/0)$ ,  $\vec{a}(B/0)$ .

#### T.D. 2.7.: Souris de micro-ordinateur

Ci-dessous est représentée une souris mécanique associée à un micro-ordinateur. Le repère  $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$  est lié au plan de travail indicé  $\bf 0$ . Le repère  $R_1(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$  est lié au cadre de la souris  $\bf 1$ . En fonctionnement normal, la bille roule sans glisser en I, sur le plan lié à  $\bf 0$ . Le galet  $\bf 3$ , de rayon a, fait l'objet d'une liaison pivot d'axe  $(L,\vec{y}_1)$  avec le cadre  $\bf 1$ . Le galet  $\bf 4$ , de rayon a, fait l'objet d'une liaison pivot d'axe  $(M,\vec{x}_1)$  avec le cadre  $\bf 1$ . Les galets  $\bf 3$  et  $\bf 4$  commandent des potentiomètres. En fonctionnement normal, ils roulent sans glisser, respectivement en  $\bf J$  et  $\bf K$  sur la bille  $\bf 2$ .



On note  $\vec{\Omega}$   $(3/1) = \omega_{31} \vec{y}_1$  le vecteur instantané de rotation de 3 par rapport à 1 et  $\vec{\Omega}$   $(4/1) = \omega_{41} \vec{x}_1$  le vecteur instantané de rotation de 4 par rapport à 1. Le solide 1 est animé d'un mouvement plan par rapport au solide 0. La condition de contact en C impose  $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{z}_0 = R$ . La position de 1 par rapport à 0 est définie par :  $\overrightarrow{OC} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + R \cdot \vec{z}_0$   $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  avec  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ .

Le torseur cinématique associé au mouvement de la bille  $\bf 2$  par rapport au cadre  $\bf 1$  est défini par :

$$\left\{ V\left(2 \, / \, 1\right) \right\} : \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}\left(2 \, / \, 1\right) = p.\vec{x}_0 + q.\vec{y}_0 + r.\vec{z}_0 \\ \vec{V}\left(C \in 2 \, / \, 1\right) = \vec{0} \end{matrix} \right\}$$

Pour l'instant, les composantes p, q et r du vecteur instantané de rotation sont inconnues. On se donne le mouvement du cadre  $\bf 1$  par rapport au plan  $\bf 0$ :

$$\left\{V\left(1/0\right)\right\} \colon \begin{cases} \vec{\Omega}\left(1/0\right) = \dot{\theta}.\vec{z}_{0} \\ \vec{V}\left(C \in 1/0\right) = \dot{x}.\vec{x}_{0} + \dot{y}.\vec{y}_{0} \end{cases}$$

- **a-** Expliciter la condition de roulement sans glissement en I. En déduire le vecteur instantané de rotation  $\vec{\Omega}$  (2 / 1) en fonction des données.
- **b-** Expliciter la condition de roulement sans glissement en J. En déduire le vecteur instantané de rotation  $\vec{\Omega}$  (3 / 1) en fonction des données.
- c- Expliciter la condition de roulement sans glissement en K. En déduire le vecteur instantané de rotation  $\vec{\Omega}$  (4 / 1) en fonction des données.

#### T.D. 2.8.: moteur PORSCHE 8 CYLINDRES

#### Introduction

Ci-contre est représenté le mythique moteur PORSCHE 8 cylindres à plat ("flat twins") de 1500 cm³ de cylindrée. Nous allons tout particulièrement nous intéresser au système "bielle/manivelle" composé par le bloc moteur  $\mathbf{0}$ , le vilebrequin  $\mathbf{1}$ , la bielle  $\mathbf{2}$  et le piston  $\mathbf{3}$ . Le but de cette étude est de déterminer pour une fréquence de rotation du moteur de 5 000 trs/min la vitesse du point G appartenant à la bielle  $\mathbf{2}$  par rapport au bâti  $\mathbf{0}$ .

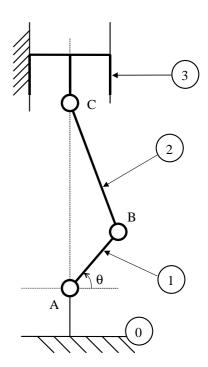
#### Données nécessaires

Diamètre du cylindre : 66 mm

Course du piston : 2AB = 54.6 mmEntraxe de la bielle : CB = 126 mm

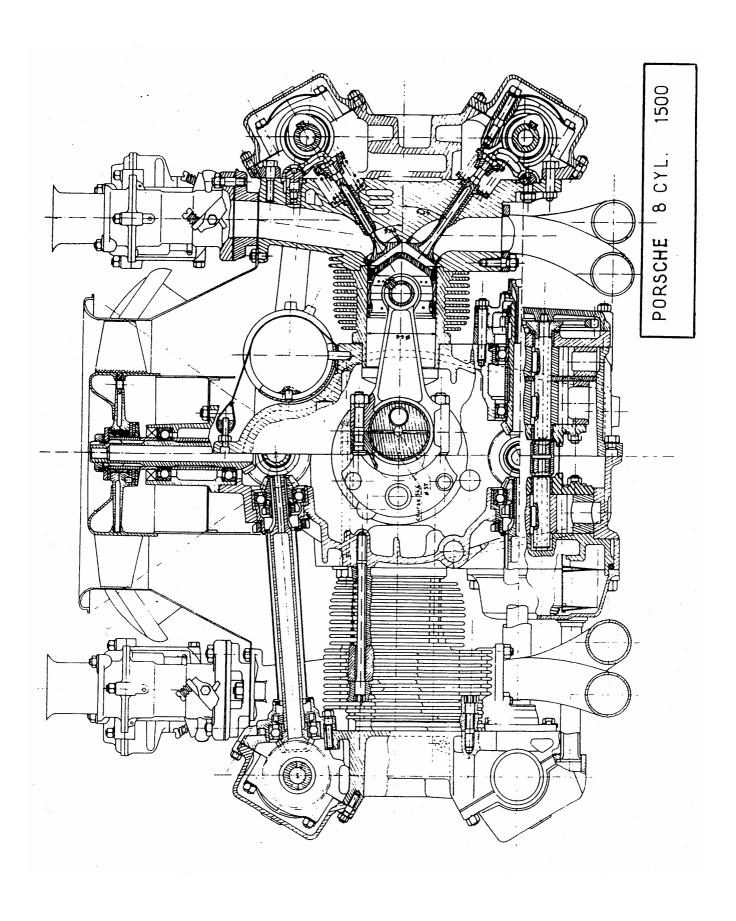
Fréquence de rotation du vilebrequin : 5 000 trs/min

Position du centre de gravité : BG = 50 mm



#### Travail demandé

- a- Est-ce un mouvement plan? Justifiez votre réponse.
- b- Coloriez sur le dessin d'ensemble ci-contre la bielle 2, le vilebrequin 1, le piston 3 et le bâti 0 en utilisant des couleurs différentes
- c- Représentez à l'échelle 1 sur une feuille de format A4V le schéma cinématique de l'embiellage de ce moteur à l'instant  $t_0$  pour lequel  $\theta = \theta_0 = 60^\circ$ . On gardera les mêmes couleurs que pour le 2.).
- **d-** Calculez la norme de la vitesse en m/s du point B appartenant au vilebrequin **1** par rapport au bâti  $\mathbf{0} : \|\vec{V}(B \in 1/0)\|$ . Représentez-la sur votre schéma. Vous prendrez l'échelle suivante : 1 cm  $\leftrightarrow$  3 m/s.
- **e-** Quelle est la nature du mouvement du piston ? En déduire la direction du vecteur vitesse du point C appartenant au piston 3 par rapport au bloc moteur  $\mathbf{0}: \vec{V}(C \in 3/0)$ . Tracez cette direction sur votre schéma.
- **f-** Déterminez graphiquement la norme du vecteur  $\vec{V}(C \in 3/0)$ .
- g- Déterminez le centre instantané de rotation  $I_{2/0}$  du mouvement plan de la bielle 2 sur 0 à l'instant  $t_0$ .
- **h-** Après avoir placé le centre de gravité G sur votre schéma, déterminez graphiquement la direction du vecteur vitesse du point G appartenant à la bielle **2** par rapport au bloc moteur **0** :  $\vec{V}(G \in 2/0)$ .
- i- Quelle est la norme de ce vecteur vitesse?



### T.D. 2.9.: bloc de bridage (extrait du D.S. n°2 de 1997)

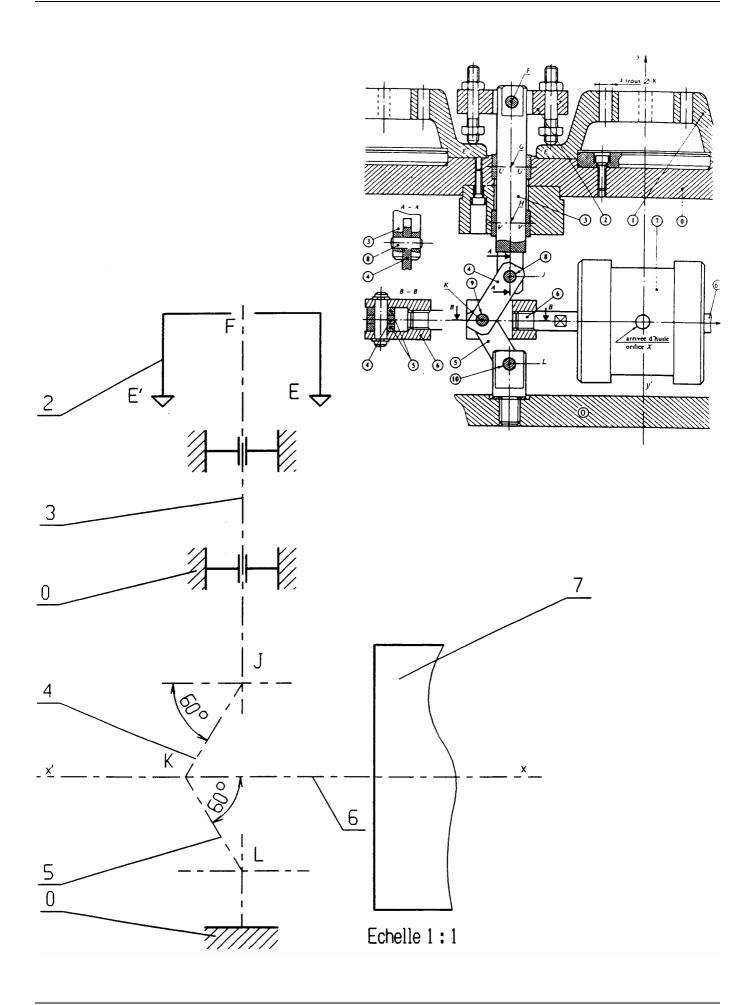
La figure ci-contre représente la partie centrale d'un bloc de bridage utilisé pour le maintien des trois pièces 1 pendant le perçage des quatre trous  $\phi 8$  mm sur une perceuse multibroches. Le système présente deux plans de symétrie : celui de la figure et celui perpendiculaire au précédent et de trace  $(\vec{y}, \vec{y}')$ . L'arrivée d'huile sous pression par l'orifice X provoque l'écartement symétrique des deux tiges de vérin 6 et 6'. Il s'ensuit alors une descente des tiges 3 et des palonniers 2 grâce au système constitué par les biellettes 4 et 5. Le rappel du système en position repos s'effectue par deux ressorts symétriques internes au vérin 7.

#### Hypothèses

- On admettra que pendant le fonctionnement le mouvement de 7 par rapport au bâti  $\mathbf{0}$  est une translation verticale d'axe  $(\bar{y}, \bar{y}')$ .
- On notera  $\vec{V}(K \in 6/7)$  le vecteur vitesse du point K appartenant au solide 6 dans son mouvement par rapport à 7.
- ◆ Lors de la rentrée des tiges 6 et 6' du vérin correspondant à la **phase de desserrage**, on donne :  $\|\vec{V}(K \in 6/7)\| = 4 \text{ mm/s}$ .
- ◆ Toutes les constructions graphiques seront faites sur la figure ci-contre. Cette figure schématise la position qu'occupe le mécanisme au début de la phase de desserrage.

- a- Après avoir complété le schéma cinématique ci-contre, représentez le vecteur vitesse  $\vec{V}(K \in 6/7)$  en ce début de phase de desserrage. Vous prendrez l'échelle des vitesses suivante : 1 cm  $\Leftrightarrow$  1 mm/s. (0,5 point)
- **b-** Tracez les supports des vecteurs vitesse  $\vec{V}(K \in 5/0)$  et  $\vec{V}(K \in 7/0)$  sur le schéma cinématique ci-contre.
- **c-** A partir de la relation de composition des vecteurs vitesse relative au point K, déterminez graphiquement  $\vec{V}(K \in 5/0)$  et  $\vec{V}(K \in 7/0)$ . Précisez leur norme.
- **d-** Positionnez graphiquement le Centre Instantané de Rotation  $I_{4/0}$  du mouvement plan de 4/0.
- e- Déterminez graphiquement  $\vec{V}(L' \in 4/0)$ , L' étant le point milieu du segment [KJ]
- **f-** Déterminez graphiquement  $\vec{V}(J \in 4/0)$  et déduisez-en  $\vec{V}(J \in 3/0)$  puis  $\vec{V}(F \in 3/0)$ .

Pour chacune des étapes b. à e., les constructions et les affirmations devront être justifiées.



#### T.D. 2.10.: variateur GRAHAM (extrait du D.S. n°2 de 1997)

Le dessin du variateur de vitesse mécanique GRAHAM, ainsi que son schéma cinématique paramétré sont donnés cicontre.

Il est composé essentiellement de cinq solides :

- ♦ un bâti S<sub>0</sub>;
- ◆ un porte-satellite S<sub>1</sub>, lié à l'arbre d'entrée ;
- ♦ un satellite S<sub>3</sub> constitué d'un cône ;
- ♦ un planétaire à denture intérieure S<sub>2</sub>, lié à l'arbre de sortie ;
- $\bullet$  une couronne extérieure  $S_0^*$ .

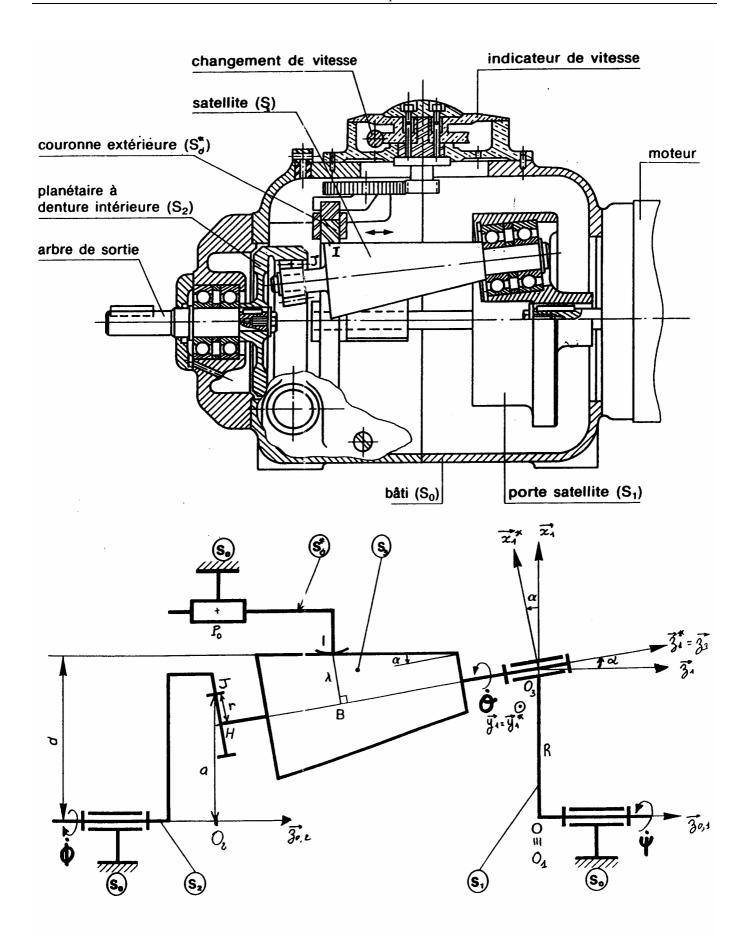
Les liaisons entre les différents solides sont les suivantes :

- $S_0/S_1$ : liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ ;
- $\bullet$  S<sub>0</sub>/S<sub>2</sub>: liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ ;
- $S_1/S_3$ : liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1^*)$ ;
- $S_3/S_0^*$ : contact ponctuel en I;
- $\bullet$  S<sub>3</sub>/S<sub>2</sub>: contact ponctuel en J;
- $S_0^*/S_0$ : liaison glissière d'axe  $(P_0, \vec{z}_0)$ .

Repèrage et paramétrage :

- $\blacklozenge$  à  $S_0,$  on lie le repère  $R_0$  ( O  $\,$  ,  $\,\vec{z}_{-2}$  ) ,  $\,\vec{z}_{0}$  étant porté par l'axe commun aux deux liaisons pivot ;
- lacklach à  $S_1$ , on lie le repère  $R_1$   $\vec{x}_4 = \vec{x}_2$  défini par :  $O_1 \equiv O$  ;  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{O_1O_3} = R \vec{x}_1$ . On repère la rotation de  $R_1/R_0$  par :  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .
- ullet à  $S_2$ , on lie le repère  $R_2\left(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2\right)$  défini par :  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$ . On repère la rotation de  $R_2/R_0$  par :  $\phi = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ .
- ♦ On introduit un repère  $R_1^*$  lié à  $S_1$  défini par :  $\vec{y}_1^* = \vec{y}_1$ ,  $\vec{z}_1^*$  étant porté par l'axe de la liaison pivot entre  $S_3$  et  $S_1$ . Par construction,  $\alpha = (x_1, \vec{x}_1^*)$  et  $\overrightarrow{O_3H} = -L\vec{z}_1^*$  ( $\alpha$  est un paramètre géométrique constant).
- ♦ On repère la position de  $S_0^*$  en translation par rapport à  $S_0$  par :  $\overrightarrow{BI} = \lambda \vec{x}_1^*$ ,  $\lambda$  étant le paramètre de réglage qui permet de positionner le point I sur le cône  $S_3$ . Dans toute cette étude, on considérera que  $\lambda = \text{cte } (S_0^* \text{ est donc lié au bâti } S_0)$ .

- **a-** Faîtes les trois schémas plans paramètrés visualisant les passages de  $R_0$  à  $R_1$ , de  $R_0$  à  $R_2$  et de  $R_1^*$  à  $R_3$ .
- **b-** Trouvez la relation existant entre R, α, L, r et a en exprimant une fermeture géométrique.

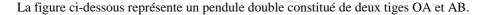


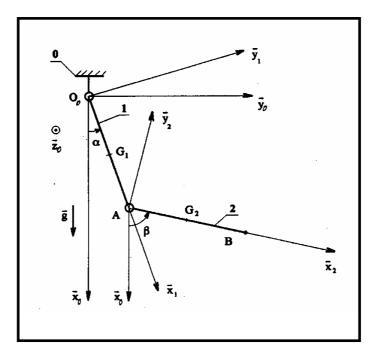
- c- On suppose qu'il y a roulement sans glissement au point I. En utilisant cette hypothèse, puis une relation de composition des vecteurs vitesse faisant intervenir le porte-satellite  $S_1$ , déterminez la relation liant  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\theta}$ .
- **d-** On suppose qu'il y a roulement sans glissement au point J. En utilisant cette hypothèse, puis une relation de composition des vecteurs vitesse faisant intervenir les solides  $S_1$  et  $S_0$ , déterminez la relation liant  $\dot{\psi}, \dot{\theta}$  et  $\dot{\phi}$ .
- e- A partir des relations trouvées en c- et d-, exprimez le rapport de transmission  $\rho = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}$  du variateur en fonction des données géométriques et du paramètre de réglage  $\lambda$ .
- **f-** En prenant d=40 mm et  $\frac{r}{a}=\frac{1}{4}$ , remplissez le tableau des valeurs prises par  $\rho$  lorsque  $\lambda$  varie entre la valeur  $\lambda_{min}=8$  mm et la valeur  $\lambda_{max}=20$  mm.

λ (mm)	8	10	12	15	20
ρ					

**g-** En utilisant la relation de composition des accélérations fournie dans le formulaire, calculez  $\vec{a}(J \in 3/0)$  en fonction de  $\psi$  et  $\dot{\theta}$ . Vous exprimerez le résultat dans  $R_1$ .

#### T.D. 2.11.: pendule double





La tige OA est en liaison pivot d'axe  $\left(O,\vec{z}_{0}\right)$  avec le bâti. La tige AB est en liaison pivot d'axe  $\left(A,\vec{z}_{0}\right)$  avec la tige OA. Soient les trois repères :  $R_{0}\left(O,\vec{x}_{0},\vec{y}_{0},\vec{z}_{0}\right)$  lié au bâti,  $R_{1}\left(O,\vec{x}_{1},\vec{y}_{1},\vec{z}_{1}\right)$  lié à la tige OA et  $R_{2}\left(A,\vec{x}_{2},\vec{y}_{2},\vec{z}_{2}\right)$  lié à la tige AB, tels que :

$$\overrightarrow{OA} = a \vec{x}_1 \quad (a > 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = b \vec{x}_2 \quad (b > 0)$$

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$

$$\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2).$$

- **a-** Calculer le vecteur vitesse du point B par rapport au repère  $R_0$  :  $\vec{V} \Big( B \, / \, R_0 \Big)$  .
- **b-** Calculer le vecteur vitesse du point B par rapport au repère  $R_1: \ \vec{V}\big(B \, / \, R_1\big)$  .
- $\textbf{c-} \ \text{Calculer le vecteur vitesse du point } B \ \text{appartenant au repère } R_1 \ \text{par rapport au repère } R_0 : \quad \vec{V} \Big( B \in R_1 \ / \ R_0 \Big) \ .$
- **d-** Calculer le vecteur accélération du point B par rapport au repère  $R_0$ :  $\vec{a}(B/R_0)$ .
- **e-** Calculer le vecteur accélération du point B par rapport au repère  $R_1$ :  $\vec{a}(B/R_1)$ .
- $\textbf{f-} \ \text{Calculer le vecteur accélération du point } B \ \text{appartenant au repère } R_1 \ \text{par rapport au repère } R_0 : \quad \vec{a} \Big( B \in R_1 \ / \ R_0 \Big) \ .$



#### Actionneur de vanne

## Partie 1 – modélisation et paramétrage

## Présentation du système

Le système est prévu pour piloter à distance l'ouverture ou la fermeture de vannes hydrauliques papillon de dimension conséquente. Ce pilotage s'effectue par l'intermédiaire d'un vérin pneumatique. La translation du vérin est convertie en rotation de la vanne par un système de type « bielle - manivelle » que nous allons étudier.

Le dessin d'ensemble est fourni en annexes.

## Questions:

Donner les classes d'équivalence des différentes pièces du mécanisme dans le tableau ci dessous (/1)

Numéro	nom	Numéro de pièces
1	bâti	
2		
3		

Proposer un graphe des liaisons du mécanisme

(/1)

Proposer un schéma cinématique spatial du mécanisme

(/1)

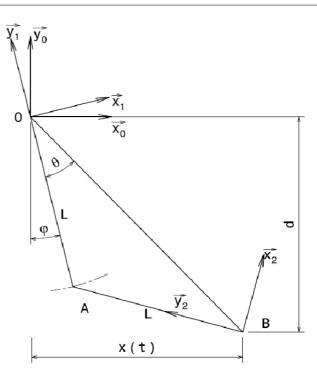
Sur le schéma de principe ci contre, le point O, immobile par rapport au bâti « 0 », représente le centre de rotation du carré d'entraînement de la vanne.

Le carré d'entraînement de la vanne « 1 », auquel est lié la barre « OA » a un mouvement de rotation de centre O, d'axe  $\overline{z_{0,1}}$  et d'angle  $\varphi = \varphi(t)$  par rapport au bâti « 0 ».  $\overrightarrow{OA} = -L \vec{y_1}$ 

La biellette AB, solide « 2 » a un mouvement de rotation par rapport à « 1 » d'axe  $\overline{z_{1,2}}$  et de centre A. Elle a aussi un mouvement de rotation de centre B relativement à la tige de vérin.  $\overline{AB} = -L \ \vec{y}_2$ 

Le point B a un mouvement de translation d'axe  $\vec{x_0}$  par rapport au bâti, tel que  $\vec{OB} = x(t)\vec{x_0} - d\vec{y_0}$ 

On note  $\widehat{AOB}$  l'angle  $\theta$ .  $\theta = \theta(t)$  et  $\varphi = \varphi(t)$  variables.  $\theta(t)$  est un paramètre intermédiaire que nous devrons faire disparaître du calcul.



(/2)

En analysant le schéma donner les valeurs maximales et minimales que peut prendre x(t) en fonction des autres dimensions du système

En utilisant la « loi des sinus », et les relations trigonométriques, montrer que  $\theta(t) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x(t)^2 + d^2}}{2L}\right)$ . (/3)

Montrer que 
$$\varphi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{x(t)}{d}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x(t)^2 + d^2}}{2L}\right)$$
. (/2)



## Partie 2 – cinématique

Les calculs s'appuient sur le schéma précédent.

Soit G le milieu de la barre AB.

Déterminer, en fonction de  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$ , x(t) et des dimensions fixes

• 
$$\Omega(1/0)$$
 (/0,5)

• 
$$\overline{V(A/0)}$$
 (/1)

$$\overline{a(A/0)} \qquad (/1)$$

• 
$$\overline{\Omega(2/1)}$$
 (/0,5)

• 
$$\overline{V(G \in 2/1)}$$
 (/1)

• 
$$\overline{a(G \in 2/1)}$$
 (/1)

• 
$$\overline{\Omega(2/0)}$$
 (/1)

• 
$$V(G \in 1/0)$$
 (/1)

• 
$$\overline{a(G \in 1/0)}$$
 (/1)

• 
$$\overline{V(G/0)}$$

• 
$$\overline{a(G/0)}$$
 (/1)

Remplacer  $\varphi(t)$ ,  $\theta(t)$  par leurs valeurs en fonction de x(t) et des autres dimensions fixes pour obtenir V(A/0)(/4)

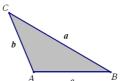
Rappels de trigonométrie

$$\sin\frac{(\hat{A})}{a} = \sin\frac{(\hat{B})}{b} = \sin\frac{(\hat{C})}{c}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^{2}(x) = \frac{\tan^{2}(x)}{(1 + \tan^{2}(x))}$$





$$\cos^2(x) = \frac{1}{(1 + \tan^2(x))}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{(1 + \tan^2(x))}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{(1 + \tan^2(x))}$$

$$\tan(\pi/2 + x) = -\frac{1}{\tan(x)} \qquad \tan(\pi/2 - x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

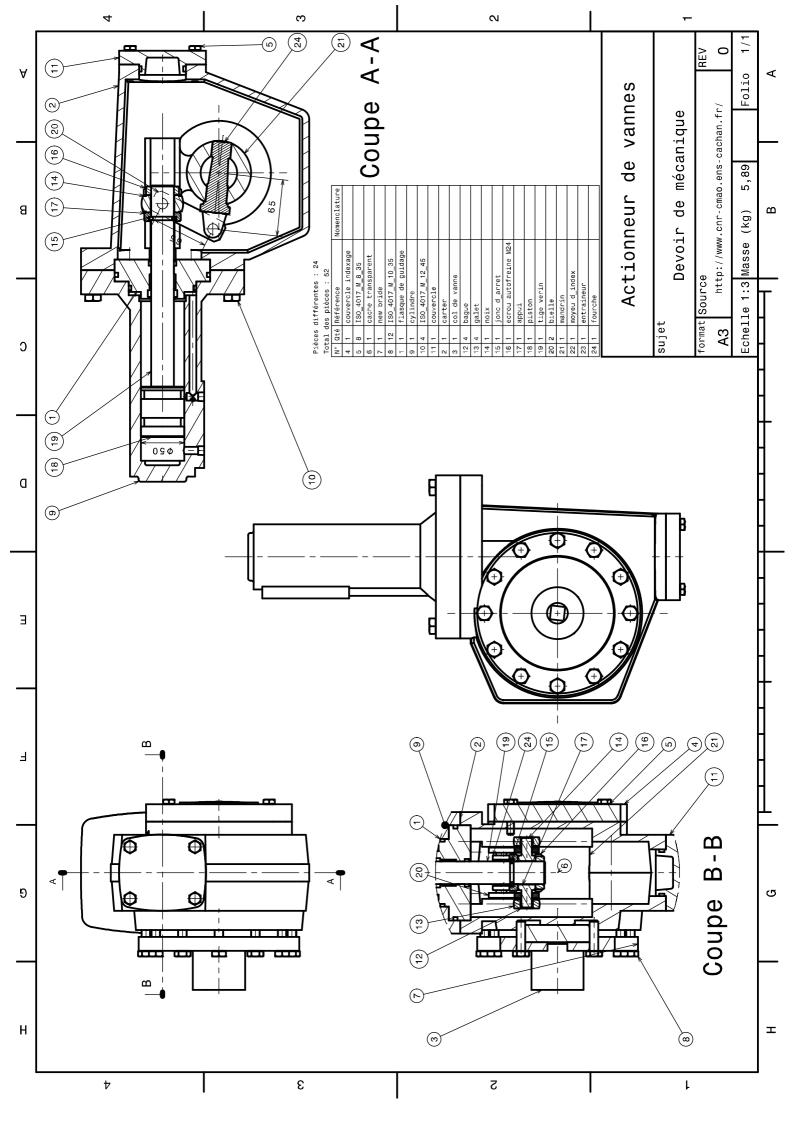
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

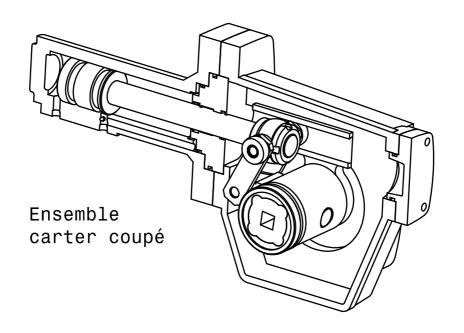
dérivation

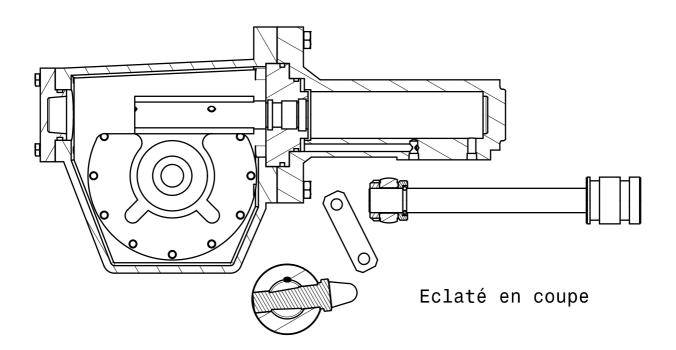
$$\frac{d(\sin^{-1}(f(x)))}{dx} = \frac{\frac{d(f(x))}{dx}}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$$

$$\frac{d(\sin^{-1}(f(x)))}{dx} = \frac{\frac{d(f(x))}{dx}}{\sqrt{1 - f(x)^{2}}} \qquad \frac{d(\cos^{-1}(f(x)))}{dx} = \frac{-\frac{d(f(x))}{dx}}{\sqrt{1 - f(x)^{2}}} \qquad \frac{d(\tan^{-1}(f(x)))}{dx} = \frac{\frac{d(f(x))}{dx}}{1 + f(x)^{2}}$$

$$\frac{d\left(\tan^{-1}(f(x))\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}}{1 + f(x)^{2}}$$









#### Conditions d'examen

• Durée : 2 heures

- Documents : interdits à l'exception d'un résumé de cours A4 recto simple manuscrit à rendre avec la copie
- Calculatrice : autorisée
- Les téléphones portables et autres appareils électroniques doivent être éteint et rangés dans les sacs. Les sacs seront amenés près du tableau ou au fond de la salle
- Matériel nécessaire : stylo, règle, équerre, crayon papier ou porte mine, gomme.

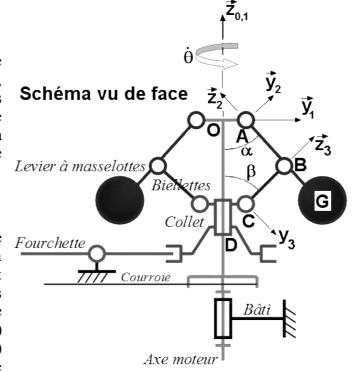
# Régulateur de Watt

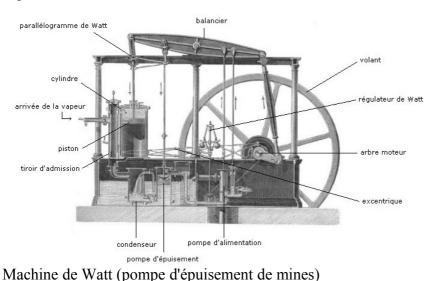
Ce régulateur, inventé par James Watt était utilisé comme capteur de fréquence de rotation, permettant de réguler le fonctionnement des premières machines à vapeur. Le mécanisme de régulation ainsi formé est considéré comme la première boucle d'asservissement du monde industriel.

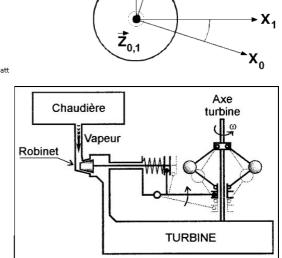
# Description

L'axe (1) est entraîné en rotation par une courroie reliée à l'arbre moteur. L'axe (1) entraîne dans sa rotation autour de l'axe vertical les deux bras (2) et (2') qui prennent une position d'équilibre sous l'action conjuguée de leur poids et de la force centrifuge. L'inclinaison des bras (2) et (2') modifie, par l'intermédiaire des biellettes (3) et (3') la position du collet (la pièce 4) suivant l'axe  $(O, \overline{z}_1)$ .

La position de la pièce n°4 sur l'axe (1) est utilisée pour ouvrir ou fermer la vanne d'alimentation de **Schéma vu de dessus** vapeur du moteur.









## Données du problème

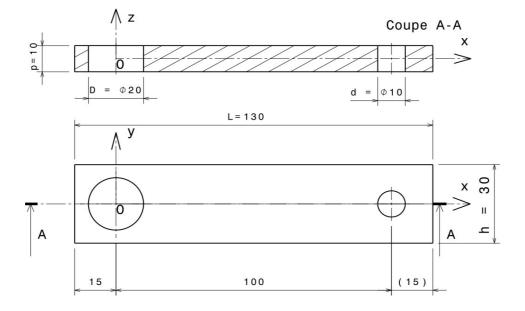
- Au bâti est associé un référentiel  $R_0$   $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
- L'arbre repère (1) est en mouvement de rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $\vec{z_0} = \vec{z_1}$  relativement au référentiel  $R_0$ . Il lui est associé un référentiel  $R_1$   $(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_{0,1}})$ .
- Les bras repère (2) et (2') sont en mouvement de rotation d'angle  $\alpha$  et d'axe  $\vec{x_1} = \vec{x_2}$  en A et A' relativement à l'arbre (référentiel  $R_1$ ). L'étude s'intéressera au bras (2), le mouvement de (2') étant symétrique à celui de (2). Au bras (2) est associé un référentiel  $R_2$   $(A, \vec{x_{1,2}}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$  L'extrémité du bras (2) porte une sphère de centre G et de masse m.
- Le collet repère (4) est en mouvement de translation d'axe  $(O, \vec{z_1})$ , centre de la liaison en D, relativement à l'arbre (1). Il lui est associé le référentiel  $R_4$   $(D, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_{01}})$
- Les biellettes repère (3) et (3') sont en mouvement de rotation d'angle  $\beta$  d'axe  $\vec{x_1} = \vec{x_3}$  en C et C' par rapport au collet (4). L'étude s'intéressera à la biellette (3), le mouvement de (3') étant symétrique à celui de (3). La biellette 3 est en liaison pivot d'axe  $\vec{x_2} = \vec{x_3}$  au point B par rapport aux bras (2). Il lui est associé le référentiel  $R_3$  (C,  $\vec{x_{13}}$ ,  $\vec{y_3}$ ,  $\vec{z_3}$ )

$$\overrightarrow{\overline{OA}} = r \overrightarrow{y_1} ; \quad \overrightarrow{\overline{AB}} = -a \overrightarrow{z_2} ; \quad \overrightarrow{\overline{BC}} = -a \overrightarrow{z_3} ; \quad \overrightarrow{\overline{AG}} = -L \overrightarrow{z_2} ; \quad \overrightarrow{\overline{CD}} = -r \overrightarrow{y_1} ; \quad (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta ; \\ (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) = \alpha ; \quad (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_3}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_3}) = \beta$$

Pour l'application numérique :

r = 30 mm, a = 100 mm, L = 200 mm,  $\alpha$  = 30° supposé constant,  $\dot{\theta}$  = 2000 tr/min supposé constant Pour la partie géométrie des masses :

Définition de la biellette (3) : (dimensions en mm). Matériau : Acier ( $\rho = 7860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )





## Questions

## Partie 1 : Cinématique

(le travail s'effectuera en littéral jusqu'à la dernière question ; vous ne chercherez pas à projeter le résultat dans une base particulière).

Calculer  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  et des données du problème. (vous remarquerez que le triangle ABC est isocèle en B). Vous remplacerez  $\beta$  par sa valeur dans toute la suite du problème. (1 point)

Faire les schémas plans paramétrés permettant de passer de  $R_0$  à  $R_1$ , de  $R_1$  à  $R_2$  et de  $R_1$  à  $R_3$ . Exprimer alors  $\Omega(1/0)$ ,  $\Omega(2/1)$ ,  $\Omega(3/1)$ ,  $\Omega(3/2)$  (2 points)

Calculer  $\overline{V(A/R_0)}$  (1 point)

Calculer par dérivation  $\overline{V(B/R_0)}$ . (1 point)

Calculer  $\overline{V(G/R_0)}$  (1 point)

Calculer  $V(C/R_2)$  (1 point)

Calculer  $V(C \in R_2/R_0)$ . En déduire  $V(C/R_0)$  (1 point)

Calculer  $\overline{a(A/R_0)}$  (1 point)

Calculer  $\overline{a(G/R_1)}$  (1 point)

Calculer  $\overline{a(G \in R_1/R_0)}$  (1 point)

Calculer  $\overline{a_{coriolis}(G; R_1/R_0)}$  (1 point)

En déduire  $\overline{a(G/R_0)}$  (1 point)

Calculer par dérivation  $\overline{a(B/R_0)}$  (1 point)

Application numérique : Calculer les valeurs numériques de  $\overline{V(G/R_0)}$  et de  $\overline{a(G/R_0)}$  avec les données numériques fournies (1 point)

## Partie 2 : Etude de géométrie des masses de la biellette

L'étude pourra être menée entièrement de manière numérique ou en utilisant les lettres  $D,d,L,h,p,\rho$  puis en faisant ensuite l'application numérique.

Calculer la masse de la pièce en kg (1 point)

Calculer les coordonnées du centre d'inertie dans le repère pièce  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  (1 point)

Calculer la matrice d'inertie de la pièce au point O, dans le repère pièce : I(O,biellette) (3 points)

Les résultats seront portés sur le tableau donné en page suivante, en respectant les unités demandées

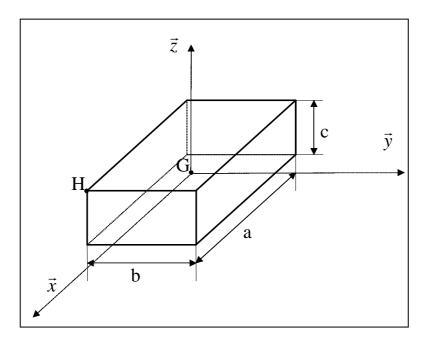


Document réponse à rendre avec la copie – Remplir les cases vides en respectant les unités imposées

	Général ———			Centre de gravité			
	Densité :	7860 kg·m <sup>-3</sup>	_  x=		mm		
	Volume :		_  y=		mm		
	Masse :		[ z=		mm		
	Surface mouillée :	0,011m <sup>2</sup>					
[	Matrice d'inertie	-					
	Ixx=	kg•m² Ixy=		kg•m² Ixz=		kg•m²	
	Iyx=	kg•m² <mark>Iyy=</mark>		kg-m² Iyz=		kg·m²	
	Izx=	kg•m² Izy=		kg•m² Izz=		kg•m²	

# T.D. 3.1. : détermination de la matrice d'inertie du parallélépipède rectangle

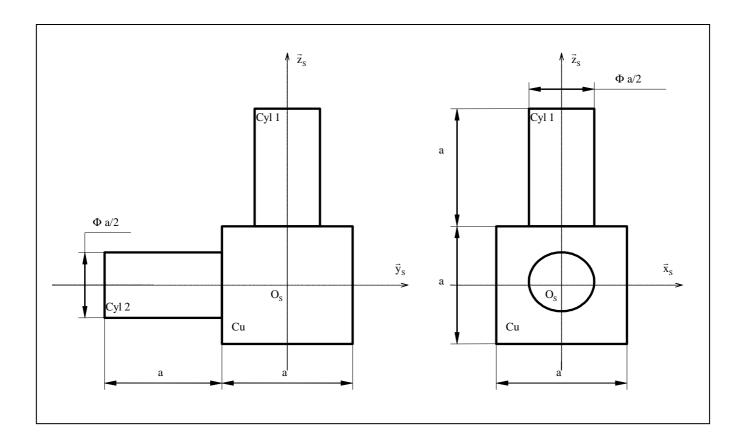
On considère un parallélépipède plein, homogène, de masse m et de dimensions a, b et c suivant les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .



- a.) Déterminer la matrice d'inertie I(G,S) dans la base  $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ .
- **b.**) En déduire la matrice d'inertie I(H,S) dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

# T.D. 3.2. : détermination de la matrice d'inertie d'un solide par association de volumes simples

Une pièce (S) est représentée ci-dessous. Elle est constituée d'un cube et de deux cylindres identiques. (S) est en acier ( $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ).



- a.) Calculer les masses m(Cu) du cube, m(Cyl) d'un cylindre et m(S) de la pièce (S).
- **b.**) Calculer les positions des centres de masse de chaque élément et de la pièce (S) dans le repère  $(O_S, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ .
- c.) Expliquer pourquoi il est possible d'écrire :

$$I(O_S, S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{(\bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)}$$

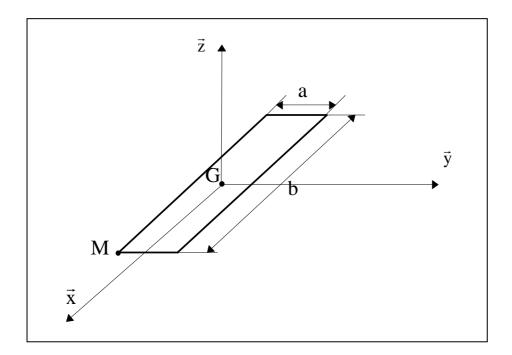
d.) Déterminer la matrice d'inertie I(O<sub>S</sub>,S).

### T.D. 3.3.: pale d'hélicoptère

Afin d'étudier les efforts qui s'exercent sur une pale d'hélicoptère en vol stationnaire, on désire calculer la matrice d'inertie de cette pale au point M. Pour simplifier les calculs, on modélise la pale par une plaque rectangulaire (S) :

- de largeur a ;
- de longueur b;
- d'épaisseur négligeable.

(S) est homogène, de masse m et de centre d'inertie G.  $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$  est un repère lié à (S) tel que l'axe  $\left(O,\vec{x}\right)$  soit parallèle au plus grand côté du rectangle et  $\left(O,\vec{z}\right)$  soit perpendiculaire au plan du rectangle.

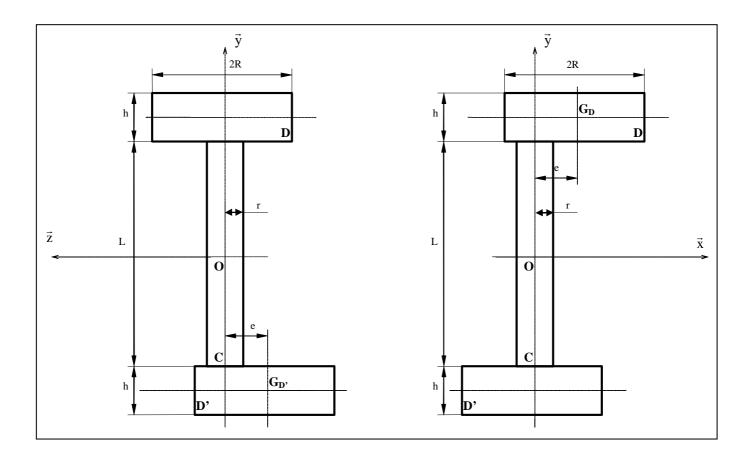


**a.**) Déterminer la matrice d'inertie I(G,S) dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**b.**) En déduire la matrice d'inertie I(M,S) dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , M étant le point de coordonnées (b/2, -a/2, 0) dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

# T.D. 3.4. : géométrie des masses d'un arbre à deux cames (extrait du D.S. n°3 de 1997)

Soit  $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$  un repère lié à l'arbre à cames (S) constitué d'un cylindre C et de deux disques (cames) identiques D et D'homogènes et de masse volumique  $\rho$ . Les deux disques D et D'sont déphasés angulairement de  $\pi/2$  et leurs centres d'inertie  $G_D$  et  $G_D$ , sont excentrés d'une valeur e par rapport à l'axe du cylindre C.



- **a-** Calculez les masses  $m_C$ ,  $m_D$  et  $m_{D'}$  de chacun des solides C, D et D' en fonction de la masse volumique  $\rho$  et des paramètres géométriques r, L, R, h et e. En déduire la masse m(S) de l'arbre e0.
- **b-** Donnez les coordonnées dans le repère  $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$  des centres d'inertie  $G_C$ ,  $G_D$  et  $G_{D'}$  de chacun des solides C, D et D'. En déduire la position du centre d'inertie G de l'arbre G.
- **c-** L'étude des plans de symétrie de l'arbre (S) permet-elle de simplifier à priori l'écriture de la matrice d'inertie I(O,S) de l'arbre à cames (S) au point O ?
- d- Déterminez les matrices d'inertie suivantes en fonction des masses m<sub>C</sub>, m<sub>D</sub> et des paramètres géométriques r, L, R, h et e :
  - ◆ I (O,C) du cylindre C au point O;
  - ◆ I (O,D) du disque D au point O;
  - ◆ I (O,D') du disque D' au point O.
- **e-** En déduire (sans trop chercher à simplifier les expressions) les termes  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $E_0$  et  $F_0$  de la matrice d'inertie I(O,S) en fonction des masses  $m_C$ ,  $m_D$  et des paramètres géométriques r, L, R, h et e.



#### Conditions d'examen

- Durée : 2 heures
- Documents : interdits à l'exception d'un résumé de cours A4 recto simple manuscrit à rendre avec la copie
- Calculatrice : autorisée
- Les téléphones portables et autres appareils électroniques doivent être éteint et rangés dans les sacs. Les sacs seront amenés près du tableau ou au fond de la salle
- Matériel nécessaire : stylo, règle, équerre, crayon papier ou porte mine, gomme.

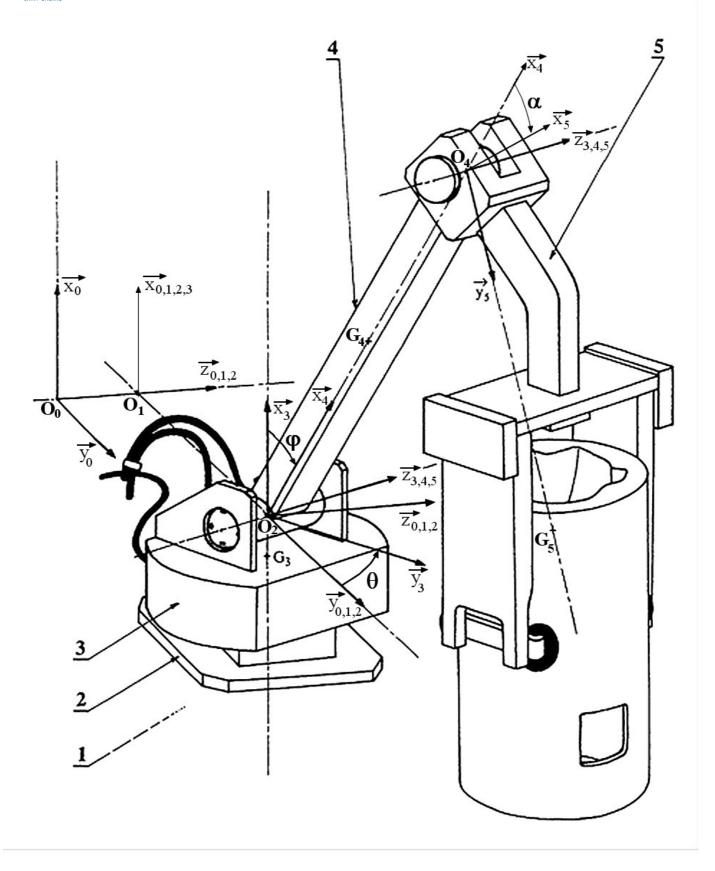
# appareil d'extraction

La figure page suivante représente une partie d'un appareil d'extraction pour machines à mouler par injection. Cet appareil saisit les pièces (brûlantes) à la sortie de la machine à mouler, les soulève, les transporte et les dépose à un endroit convenu.

Le repère R0  $(O_0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$  est lié au support 0. L'appareil d'extraction est schématisé par l'ensemble  $\{1,2,3,4,5\}$ . Pour accroître la lisibilité de la figure qui donne grossièrement l'allure de l'appareil, le support 0, la première unité de translation 1, et la plus grande partie de la deuxième unité de translation 2 ne sont pas représentés.

- 1: Première unité de translation. Repère lié : R1  $(O_1, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ . Mouvement de 1 par rapport à 0 : translation rectiligne de direction  $\vec{z_0}$ . La position de 1 par rapport à 0 est repérée par z, tel que  $O_0 O_1 = z \, \overline{z \, 0}$ , z étant une fonction continue et infiniment dérivable du temps.
- 2: Deuxième unité de translation. Repère lié: R2  $(O_2, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$  Mouvement de 2 par rapport à 1: translation rectiligne de direction  $\vec{y_0}$ . La position de 2 par rapport à 1 est repérée par y, tel que .  $O_1 O_2 = y \vec{y_0}$ , y étant une fonction continue et infiniment dérivable du temps.
- 3 : Corps pivotant. Repère lié : R3  $(O_2, \vec{x_0}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$  3. Mouvement de 3 par rapport à 2 : rotation autour de  $(O_2, \vec{x_0})$ . La position de 3 par rapport à 2 est repérée par  $\theta = (\vec{y_0}, \vec{y_3}) = (\vec{z_0}, \vec{z_3})$ . le point  $G_3$  est tel que  $O_2G_3 = a\vec{x_0}$ , a étant une constante positive.
- 4: Bras d'extraction. Repère lié: R4  $(O_2, \vec{x_4}, \vec{y_4}, \vec{z_3})$ . Mouvement de 4 par rapport à 3: rotation autour de  $(O_2, \vec{z_3})$ . La position de 4 par rapport à 3 est repérée par .  $\phi = (\vec{x_0}, \vec{x_4}) = (\vec{y_3}, \vec{y_4})$ . Le point  $G_4$  est tel que  $O_2 G_4 = d \vec{x_4}$ , d'étant une constante positive.
- 5: Unité de préhension avec la pièce moulée qu'elle agrippe. Repère lié: R5  $(O_4, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_3)$ .  $\overline{O_2O_4} = h\vec{x}_4$ , h étant une constante positive. Mouvement de 5 par rapport à 4 : rotation autour de  $(O_4, \vec{z}_3)$ . La position de 5 par rapport à 4 est repérée par  $\alpha = (\vec{x}_4, \vec{x}_5) = (\vec{y}_4, \vec{y}_5)$ . Le point G5 est tel que  $O_4\vec{G}_5 = b\vec{y}_5$ , b étant une constante positive.







# Questions

- Faîtes les schémas plans paramétrés visualisant (1,5)
  - le passage de R0 à R3,
  - le passage de R3 à R4,
  - le passage de R4 à R5.
- Exprimer les vecteurs taux de rotation (2,5)
  - $\overline{\Omega(R_3/R_0)}$
  - $\overline{\Omega(R_4/R_3)}$
  - $\Omega(R_5/R_4)$
  - $\Omega(R_4/R_0)$
  - $\Omega(R_5/R_0)$
- Calculer (littéralement) les vitesses suivantes :
  - $\overline{V(O_2/R_0)}$  par dérivation. (1)
  - En déduire  $\{V(R_2/R_0)\}$  et  $\{V(R_3/R_0)\}$  exprimés au point  $O_2$ . **(1)**
  - En déduire  $V(G_2/R_0)$ . (0,5)
  - $V(O_4/R_3)$  par la méthode de votre choix. **(1)**
  - $V(O_4 \in 3/R_0)$  en utilisant le torseur cinématique du solide 3 relativement au référentiel  $R_0$ . **(1)**
  - en déduire  $\overline{V(O_4/R_0)}$  en utilisant la composition des vitesses, et, par similitude,  $\overline{V(G_4/R_3)}$ **(1)**
  - $V(G_5/R_0)$  par dérivation du vecteur position. **(1)**
- Calculer (littéralement) les accélérations suivantes
  - $a(G_3/R_0)$  en déduire  $a(O_2/R_0)$ (1,5)
  - $a(G_4/R_3)$ (1)
  - $a(G_4 \in 3/R_0)$ **(1)**
  - $a(G_4/R_0)$  en utilisant la composition des accélérations (1,5)
  - $a(G_5/R_0)$  par dérivation de  $V(G_5/R_0)$ (1,5)

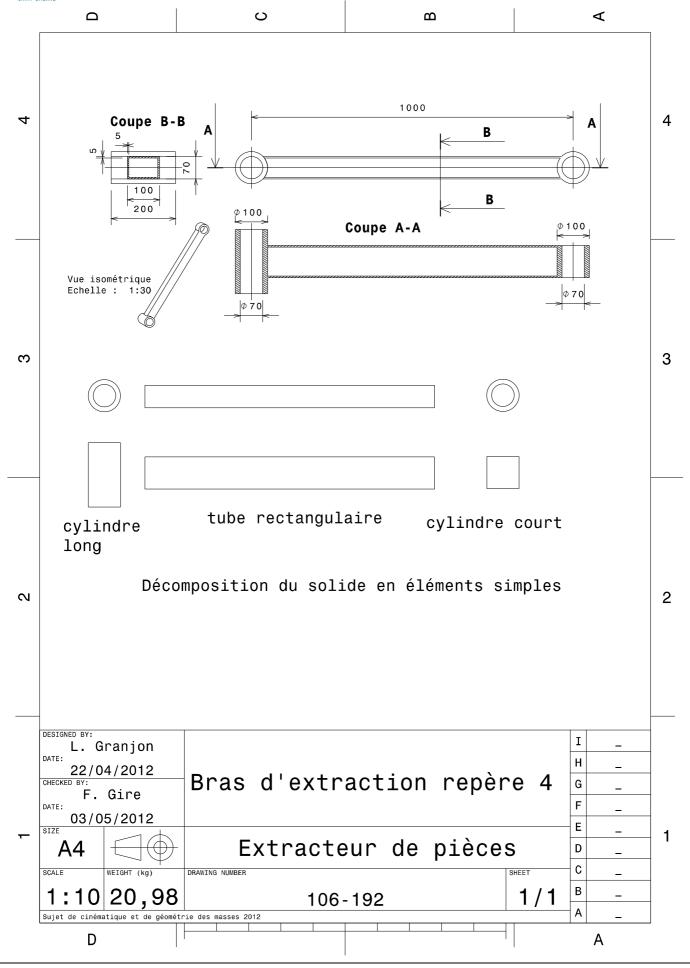
#### Géométrie des masses

Le solide 4 est représenté par le dessin de la page suivante. Ce solide a pour masse m<sub>4</sub>, pour centre d'inertie

Le solide 4 est représenté par le dessin de la page survainc. Ce sonde  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{x}_3 = \vec{x}_4 = \vec{$ 

- certains des éléments de cette matrice d'inertie sont ils nuls ? Pourquoi ? (1)
- En décomposant la pièce comme indiqué en page suivante, et en supposant la pièce en acier (ρ=7860 kg/m³) calculer la masse de la pièce. (1)
- Quelle est la valeur numérique de d? (  $\overline{O_2G_4} = d\vec{x_4}$ ) (0,5)
- Calculer la matrice d'inertie du cylindre long en son centre d'inertie **(1)**
- Calculer la matrice d'inertie du cylindre court en son centre d'inertie **(1)**
- Décrire précisément les calculs que vous devriez effectuer pour calculer A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub> et C<sub>4</sub> sans effectuer les calculs
- s'il vous reste du temps, calculer ces trois valeurs et donner la matrice d'inertie I(G<sub>4</sub>,S<sub>4</sub>) dans R<sub>4</sub>



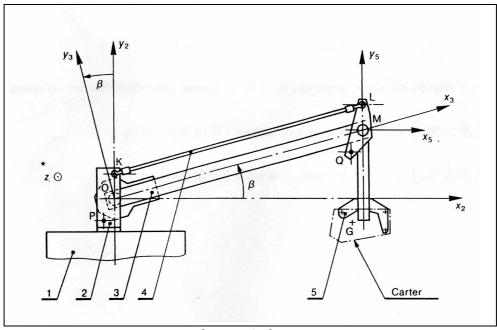


#### T.D. 3.5.: bras manipulateur

La figure ci-dessous représente un bras manipulateur destiné à déplacer, sur une chaine de moulage, des carters en alliage léger de boite de vitesses. Il est constitué du bras principal 3 de longueur l=1700 mm, en liaison pivot d'axe  $\left(O,\vec{z}\right)$  avec la tourelle d'orientation 2, elle-même en liaison pivot d'axe  $\left(O,\vec{y}_2\right)$  avec le socle 1. Soit  $R_2\left(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}\right)$  le repère lié à la tourelle 2 et  $R_3\left(O,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}\right)$  le repère lié au bras 3. Un dispositif de préhension 5 est articulé à l'autre extrémité du bras par une liaison pivot d'axe  $\left(M,\vec{z}\right)$ . Ce dispositif comporte un tube dont une extrémité est boulonnée sur l'arbre de la liaison pivot. Une pince à commande hydraulique est fixée à l'autre extrémité du tube. Soit  $R_5\left(M,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}\right)$  le repère lié au dispositif de préhension 5. Nous assimilerons l'ensemble {tube-pince-carter} à une masse ponctuelle m=45 kg située au point G, tel que :

$$\overrightarrow{MG} = x \vec{x}_5 + y \vec{y}_5 + z \vec{z}$$

Le but de l'étude est de déterminer la projection sur l'axe  $(M, \vec{z})$  du moment dynamique du dispositif de préhension afin de calculer, par la suite, les actions mécaniques exercées en L par la biellette **4**, de même longueur que le bras, et qui assure la verticalité du dispositif quelque soit la position angulaire du bras.



bras manipulateur

- a.) Calculer le vecteur accélération  $\vec{a}(G/2)$  du centre d'inertie G par rapport au socle 2, lorsque l'accélération angulaire du bras est  $\beta'' = 2 \text{ rad.s}^{-2}$  et sa vitesse de rotation  $\beta' = 2,5 \text{ rad.s}^{-1}$ .
- **b.**) Calculer la projection sur  $\vec{z}$  du moment dynamique au point M du dispositif de préhension dans son mouvement par rapport au socle 2, lorsque la position du bras est telle que  $\beta=30^\circ$ . On donne :

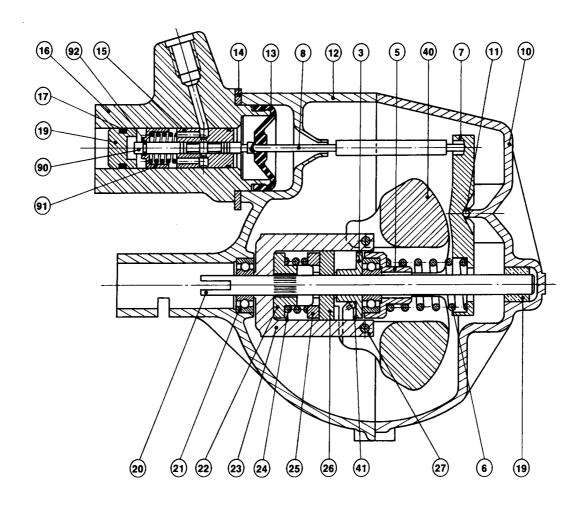
$$x = -60 \text{ mm}$$

y = -620 mm

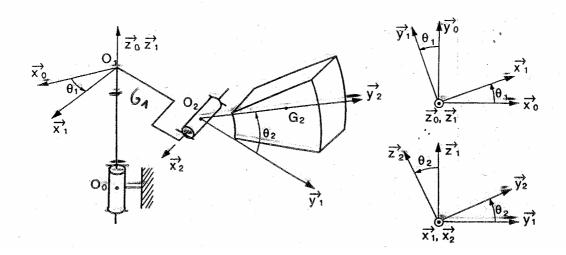
z = 30 mm.

# T.D. 3.6.: régulateur centrifuge

On considère un régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de Citroën. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance de la direction en fonction de la vitesse.



Considérons uniquement l'axe  $S_1$  et la masselotte  $S_2$  et paramétrons les différents mouvements :



- $\bullet \ S_1 \ \text{est en liaison pivot d'axe} \ \left( O_0 \,, \vec{z}_0 \right) \ \text{avec} \ S_0 : \left( \vec{x}_0 \,, \vec{x}_1 \right) = \left( \vec{y}_0 \,, \vec{y}_1 \right) = \theta_1 \ ;$
- $S_2$  est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec  $S_1: (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .

Les différents paramètres géométriques sont :  $\overrightarrow{O_0G_1} = l_1 \, \vec{z}_0$   $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \, \vec{z}_0 + L_1 \, \vec{y}_1$   $\overrightarrow{O_2G_2} = l_2 \, \vec{y}_2$ 

Les différents éléments d'inertie des solides sont :

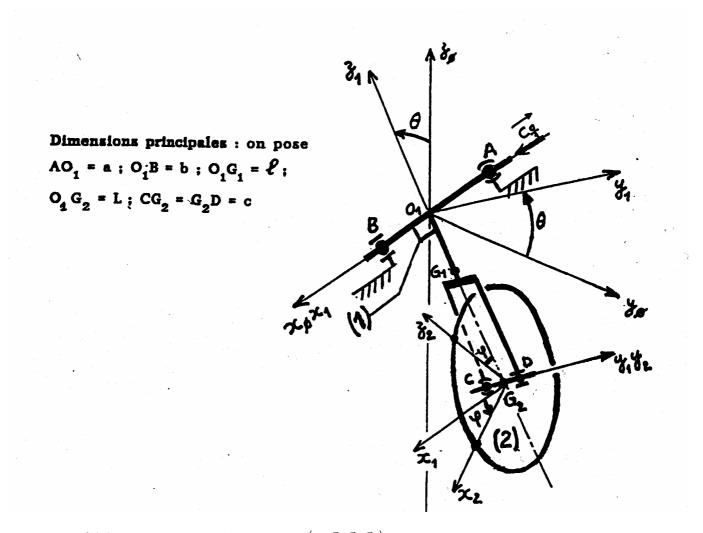
$$\bullet \underline{\text{pour } S_1} : \text{masse } m_1 \text{ et } I(O_0, S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\bar{x_1}, \bar{y_1}, \bar{z_1})}$$

Afin de ne pas trop alourdir les calculs, supposons  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  constantes. Déterminez dans ces conditions :

- $\textbf{a.)} \text{ le torseur cinétique } \left\{ \boldsymbol{C}\left(S_{1}/R_{0}\right)\right\} \text{ en } O_{1} \text{ puis le torseur dynamique } \left\{ \boldsymbol{D}\left(S_{1}/R_{0}\right)\right\} \text{ en } O_{1}.$
- $\textbf{b.)} \text{ le torseur cinétique } \left\{ \textbf{C}\left(S_2/R_0\right) \right\} \text{ en } O_2 \text{ puis le torseur dynamique } \left\{ \textbf{D}\left(S_2/R_0\right) \right\} \text{ en } O_2.$

#### T.D. 4.1. : étude de la rentrée d'un train d'atterrissage

Le schéma ci-dessous est une représentation très simplifiée d'une partie d'un train d'atterrissage d'avion. Les liaisons sont supposées parfaites. Les actions mécaniques de l'air sur le mécanisme sont négligées.



Au **bâti 0**, lié à l'avion, est lié le repère  $R_0 \left( O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ , considéré comme galiléen parce qu'on admet que le mouvement de l'avion lors du décollage est un mouvement de translation rectiligne uniforme. Le bâti  $\bf 0$  est représenté par les paliers A et B.

Le **bras 1** du train d'atterrissage est représenté par le solide  $ABG_1CD$ . Il est soumis à un couple inconnu  $\vec{C}(0 \to 1) = C_{01} \, \vec{x}_1$  lors de la rentrée du train d'atterrissage, donnant à 1 un mouvement de rotation tel que  $\theta = \omega_{\theta} t$  autour de AB ( $\omega_{\theta}$  est une constante connue). Le bras 1 a pour masse  $m_1$  et pour centre d'inertie  $G_1$ . Il admet le plan de symétrie matérielle  $AG_1B$ , ce qui permet d'écrire, au point A fixe par rapport à  $R_0$ :

$$I(A,1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1)}$$

La **roue 2**, élancée en rotation par le roulement sur la piste, continue à tourner à la vitesse constante  $\dot{\phi} = \omega_{\phi}$  autour de l'axe CD, pendant la rentrée du train d'atterrissage ( $\omega_{\phi}$  est une constante connue). La roue **2** a pour masse  $m_2$  et pour centre d'inertie  $G_2$ . Elle est de révolution, statiquement et dynamiquement équilibrée autour de  $\vec{y}_{1,2}$ , ce qui permet d'écrire :

$$I(G_2,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{(\bar{x_1},\bar{y_1},\bar{z_1})}$$

L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

On considère l'ensemble  $\mathbf{D} = \{1, 2\}$ .

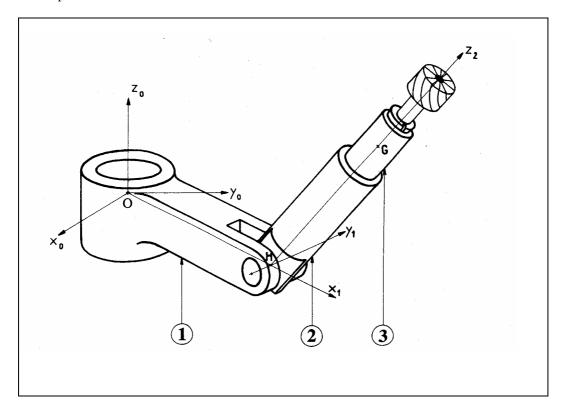
- 1- Analyse (avec schéma espace pour mettre en place les paramètres et les actions mécaniques connus ou inconnus), bilan et conclusion.
- **2-** Déterminer les torseurs dynamiques  $\{D(1/R_0)\}$ ,  $\{D(2/R_0)\}$  et  $\{D(D/R_0)\}$  en A en projection dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- 3- Après avoir énoncé le Principe Fondamental de la Dynamique, écrire les 6 équations de projection de la dynamique.
- 4- Résoudre les équations.
- 5- Analyse des résultats : en comparant les valeurs des forces en A et B lorsque  $\omega_{\phi}$  est différent de zéro et lorsque  $\omega_{\phi}$  égale zéro, quelle opération doit exécuter le pilote avant de commander la rentrée du train d'atterrissage ?
- 6- Application numérique :

$$\begin{array}{lll} m_1 = 15 \; kg & \omega_\theta = 0.5 \; rad/s & a = b = 0.1 \; m \\ m_2 = 5 \; kg & \omega_\phi = 300 \; rad/s & g = 10 \; m.s^{-2} \\ E_1 = 0.2 \; kg.m^2 & \ell = 0.5 \; m \\ B_2 = 0.6 \; kg.m^2 & L = 1 \; m \end{array}$$

### T.D. 4.2.: dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage

Le schéma ci-dessous représente le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage. Ce dispositif est formé par :

- le support tournant 1;
- le bras pivotant 2;
- le porte-outil 3.



Le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti  $B_0$  de la machine. Il est supposé galiléen.  $(O, \vec{z}_0)$  est vertical ascendant.

Les caractéristiques d'inertie données ci-après pour chaque solide tiennent compte des parties des actionneurs (systèmes moteurs) rigidement liées au solide considéré. On néglige la masse des autres éléments des actionneurs.

#### 1: support tournant.

Repère associé :  $R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0\right)$ . Mouvement de  $\mathbf{1}$  par rapport à  $R_0$ : rotation d'axe  $\left(O,\vec{z}_0\right)$ , commandée par l'actionneur  $M_{01}$  monté entre le bâti  $B_0$  et  $\mathbf{1}$  qui crée un couple  $\vec{C}_{01} = C_{01}.\vec{z}_0$  inconnu. La position angulaire de  $\mathbf{1}$  par rapport à  $R_0$  est repérée par  $\alpha = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right)$ . Le moment d'inertie de  $\mathbf{1}$  par rapport à  $\left(O, \vec{z}_0\right)$  vaut  $I_1$ . On désigne par H le point de  $\mathbf{1}$  tel que :  $\overrightarrow{OH} = h \, \vec{x}_1$ .

#### 2: bras pivotant.

Repère associé :  $R_2(H, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ . Mouvement de **2** par rapport à **1** : rotation d'axe  $(H, \vec{y}_1)$ , commandée par l'actionneur  $M_{12}$  monté entre **1** et **2** qui crée un couple  $\vec{C}_{12} = C_{12} \cdot \vec{y}_1$  inconnu. La position angulaire de **2** par rapport à **1** est repérée par  $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . La masse de **2** vaut  $m_2$  et son centre d'inertie est le point H:

$$I(H,2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_{2},\vec{y}_{1},\vec{z}_{2})}$$

#### 3 : porte-outil avec l'outil à affûter tenu par le mandrin.

Repère associé :  $R_3 \left( G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2 \right)$ . Mouvement de **3** par rapport à **2** : rotation d'axe  $(H, \vec{z}_2)$  et translation de direction  $\vec{z}_2$  (G se déplace sur  $(H, \vec{z}_2)$ ), commandées par les actionneurs  $M_{23}$  et  $V_{23}$  montés entre **2** et **3**.  $M_{23}$  crée un couple  $\vec{C}_{23} = C_{23}.\vec{z}_2$  inconnu et  $V_{23}$  exerce un effort  $\vec{F}_{23} = F_{23}.\vec{z}_2$  inconnu. La position de **3** par rapport à **2** est repérée par  $\gamma = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$  et  $\overrightarrow{HG}.\vec{z}_2 = r$ . La masse de **3** vaut  $m_3$  et son centre d'inertie est le point G:

$$I(G,3) = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)}$$

Toutes les liaisons entre les solides sont supposées parfaites.

a.) Analyse du problème : nombre d'inconnues, nombre d'équations, bilan, conclusion.

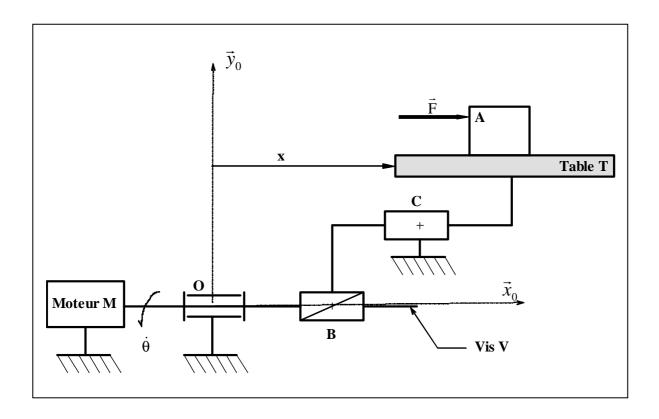
#### **ETUDE DU PORTE-OUTIL 3**

- **b.**) Isolez le porte-outil **3** et appliquez-lui le Principe Fondamental de la Dynamique.
- c.) Calculez la vitesse du point G appartenant au porte-outil 3 dans R<sub>0</sub>.
- **d.**) Cherchez la composante suivant  $\vec{z}_2$  du vecteur accélération du point G dans  $R_0$ .
- e.) Calculez l'effort  $F_{23}$  nécessaire pour translater le porte-outil 3 suivant l'axe  $\vec{z}_2$ .
- **f.**) Calculez le couple  $C_{23}$  nécessaire pour tourner le porte-outil 3 autour de l'axe  $\vec{z}_2$ .

#### ETUDE DU SYSTEME Σ FORME PAR LE BRAS 2 ET LE PORTE-OUTIL 3

- g.) Déterminez, sans développer, en H la forme du torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur  $\Sigma$ .
- h.) Déterminez, sans développer, le torseur dynamique  $\left\{D\left(\Sigma/R_{0}\right)\right\}$  .
- i.) Enoncez le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à  $\Sigma$ .
- $\textbf{j.}) \ Trouvez \ l'expression \ du \ couple \ C_{12} \ n\'{e}cessaire \ pour \ faire \ tourner \ le \ bras \ pivotant \ \textbf{2} \ autour \ de \ l'axe \ \vec{y}_1 \, .$

# T.D. 4.3. : axe de machine-outil à commande numérique (extrait du D.S. $n^{\circ}$ 4 de 1996/1997)



Ci-dessus est représenté le schéma cinématique d'un axe d'une machine-outil à commande numérique. Le moteur M lié au bâti exerce un couple inconnu  $C_m$  sur la vis V. La position angulaire de la vis par rapport au bâti est repérée par l'angle  $\theta$  à priori connu. Le système vis-écrou à billes permettant d'entraîner la table T en translation a un pas p.

<u>Rappel</u>: le pas d'un système vis-écrou est la distance parcourue par l'écrou pour un tour de la vis et le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison hélicoïdale d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  est de la forme :

$$\left\{\mathsf{T}_{\mathrm{B}}\left(\mathsf{V}\rightarrow\mathsf{T}\right)\right\} : \begin{cases} X_{B} & L_{B} \\ Y_{B} & M_{B} \\ Z_{B} & N_{B} \end{cases}_{\left(\vec{x}_{0}, \vec{y}_{0}, \vec{z}_{0}\right)} \text{ avec } \mathsf{L}_{\mathrm{B}} = -\frac{\mathsf{p}}{2\pi}\mathsf{X}_{\mathrm{B}}$$

L'ensemble {vis + rotor du moteur} est modélisé par un solide de révolution de moment d'inertie I par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ .

Soit m la masse de la table T. La position de la table par rapport au bâti est repérée par le paramètre x et on considère un effort d'usinage sur la table représenté par le glisseur connu (A,  $F.\vec{x}_0$ ).

Soit  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère lié au bâti de la machine-outil, fixe.  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen.  $(O, \vec{y}_0)$  est vertical ascendant. Toutes les liaisons sont considérées comme parfaites.

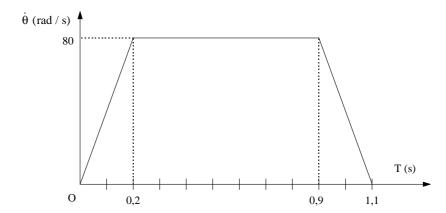
- 1.1- Analyse du problème : nombre d'inconnues, nombre d'équations, bilan, conclusion.
- 1.2- Dessinez le graphe des liaisons de cet axe de machine-outil.
- **1.3-** Justifiez la relation suivante :  $\ddot{x} = -\frac{p}{2\pi}\ddot{\theta}$ .
- **1.5-** <u>Application numérique</u> :

$$p = 3 \text{ mm}$$
  
 $I = 1.10^{-4} \text{ kg.m}^2$ 

$$m=80\;kg$$

$$F = 500 \text{ N}$$

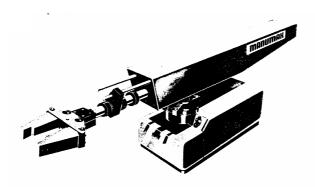
On prendra  $\pi \approx 3$  et on considérera la loi trapézoïdale des vitesses angulaires suivante :



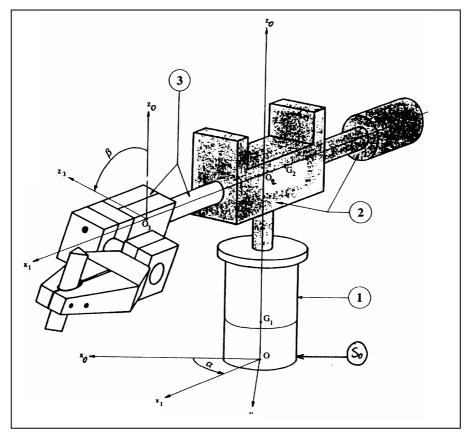
Pour chacune des trois phases ci-dessus, calculez le couple moteur C<sub>m</sub>.

### T.D. 4.4.: Manipulateur MANUMAX

Le manipulateur MANUMAX qui est représenté ci-dessous exécute des mouvements combinés et répétitifs selon un cycle déterminé. Constitué d'éléments standards (corps d'élévation, de rotation, différents types de bras, mains à doigts mobiles, à ventouse pneumatique ou électromagnétique...) qui fonctionnent à l'air comprimé, il est adaptable à de nombreuses tâches (chargement ou déchargement d'une machine ou d'un poste de travail, transfert entre convoyeurs, assemblage de pièces, ...).



La schématisation adoptée pour l'étude de ce manipulateur est la suivante :



Soit  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère lié au socle-support  $S_0$ , partiellement représenté sur la figure ci-dessus, fixe.  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen.  $(O, \vec{z}_0)$  est vertical ascendant.

Ce manipulateur est formé par trois solides : - le corps  ${\bf 1}$  ; - le bras  ${\bf 2}$  ;

- la main 3 avec la pièce qu'elle tient.

Les caractéristiques d'inertie données ci-après pour chaque solide tiennent compte des parties des vérins de commande qui lui sont rigidement liés. On néglige la masse des autres parties des vérins.

#### 1: corps.

Repère associé :  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ . Mouvement de **1** par rapport au socle  $S_0$ : rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  commandée par un vérin de rotation  $V_{S1}$ . La position angulaire de **1** par rapport à  $R_0$  est repérée par  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . La liaison entre le socle  $S_0$  et le solide **1** est parfaite. La masse du solide **1** est  $m_1$ , son centre d'inertie est  $G_1$ , situé sur l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ . La matrice d'inertie de **1** exprimée au point O est :

$$I(O,1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$$

Le vérin de rotation  $V_{S1}$ , monté entre le socle  $S_0$  et le corps 1, impose la fonction  $\alpha(t)$  (fonction connue, deux fois dérivable, imposée par le cahier des charges du manipulateur).

#### **2** : bras.

Repère associé:  $R_2(O_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ . Mouvement de 2 par rapport à 1: translation rectiligne de direction  $\vec{z}_0$  commandée par le vérin  $V_{12}$ . La position de 2 par rapport à 1 est repérée par le paramètre z, tel que  $\overrightarrow{OO_2} = z.\vec{z}_0$ . La liaison entre les solides 1 et 2 est parfaite. La masse de 2 vaut  $m_2$  et son centre d'inertie est le point  $G_2$  tel que :  $\overrightarrow{O_2G_2} = -a.\vec{x}_1$ , a étant une constante positive. La matrice d'inertie de 2 exprimée au point  $G_2$  est :

$$I(G_2,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_0)}$$

Le vérin d'élévation  $V_{12}$ , monté entre le corps  $\mathbf{1}$  et le bras  $\mathbf{2}$ , impose la fonction z(t) (fonction connue, deux fois dérivable, imposée par le cahier des charges du manipulateur).

#### 3 : main avec la pièce qu'elle tient.

Repère associé :  $R_3(O_3, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ . Mouvement de **3** par rapport à **2** : translation de direction  $\vec{x}_1$  commandée par le vérin  $V_{23}$  et rotation d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  commandée par un vérin de rotation  $V'_{23}$ . La position de **3** par rapport à **2** est repérée

par le paramètre x, tel que :  $\overrightarrow{O_2G_3} = x.\vec{x_1}$  et le paramètre angulaire  $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ . La liaison entre les solides 2 et 3 est parfaite. La masse de 3 vaut  $m_3$  et son centre d'inertie est le point  $G_3$ . La matrice d'inertie de 3 exprimée au point  $G_3$  est :

$$I(G_3,3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & -E_3 \\ 0 & B_3 & 0 \\ -E_3 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1,\bar{y}_3,\bar{z}_3)}$$

L'ensemble des deux vérins de translation  $V_{23}$  et de rotation  $V'_{23}$ , montés entre le bras  $\bf 2$  et la main  $\bf 3$ , imposent respectivement les fonctions  $\bf x(t)$  et  $\bf \beta(t)$  (fonctions connues, deux fois dérivables, imposées par le cahier des charges du manipulateur).

Cette étude dynamique du manipulateur porte sur la motorisation des différents éléments (corps d'élévation et de rotation, bras de translation et de retournement, main) : à partir des lois de variation des paramètres  $\alpha(t), z(t), x(t)$  et  $\beta(t)$ , on cherche à déterminer les efforts  $C_{S1}$ ,  $F_{12}$ ,  $C_{23}$  et  $F_{23}$  délivrés dans les différents vérins en vue de les dimensionner.

#### **ETUDE CINEMATIQUE**

- **1.1-** Faîtes les deux schémas plans paramétrés visualisant les deux rotations de  $R_0$  à  $R_3$ . En déduire les taux de rotation suivants :  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/1)$  et  $\vec{\Omega}(3/2)$
- **1.2-** Exprimez  $\vec{V}(G_2/R_0)$ .
- **1.3-** Exprimez  $\vec{V}(G_3/R_0)$ .
- **1.4-** Exprimez  $\vec{a}(G_2/R_0)$ .
- **1.5-** Exprimez  $\vec{a}(G_3/R_0)$ .

#### **ETUDE CINETIQUE**

- **1.6-** Exprimez les résultantes dynamiques :  $\vec{R}_d(2/0)$  et  $\vec{R}_d(3/0)$  en colonne dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- 1.7- Calculez le moment cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $G_2$ :  $\vec{\sigma}_{G2}(2/R_0)$ .
- **1.8-** Calculez le moment cinétique du solide **2** dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $G_3$ :  $\vec{\sigma}_{G_3}(2/R_0)$ .
- **1.9-** Déterminez le torseur cinétique du solide **2** dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $G_3$ , en colonnes dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- **1.10-** Calculez le moment dynamique du solide **2** dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $G_3$ :  $\vec{\delta}_{G3}(2/R_0)$ .
- **1.11-** Déterminez le torseur dynamique du solide **2** dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $G_3$ , en colonnes dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- **1.12-** Calculez le moment cinétique du solide 3 dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $G_3$ :  $\vec{\sigma}_{G_3}(3/R_0)$ .

### **ETUDE DYNAMIQUE (6 points)**

- 2.9- Dessinez le graphe des liaisons de ce manipulateur.
- **2.10-** Enoncez le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la main 3 en détaillant les différentes actions mécaniques qui s'appliquent sur 3.
- **2.11-** Quel théorème général faut-il utiliser pour déterminer l'effort  $F_{23}$  nécessaire pour translater la main suivant l'axe  $\vec{x}_1$ ? En projection sur quel axe? Déterminez cet effort  $F_{23}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\alpha$ , de leurs dérivées et des données de l'énoncé.
- **2.12-** Déterminez de la même façon l'expression du couple  $C_{23}$  nécessaire pour tourner la main suivant l'axe  $\vec{x}_1$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ , de leurs dérivées et des données de l'énoncé.
- **2.13-** Quel ensemble faut-il considérer pour déterminer l'effort  $F_{12}$ ? Quel théorème général faut-il utiliser? En projection sur quel axe? Déterminez cet effort  $F_{12}$  en fonction du paramètre z, de ses dérivées et des données de l'énoncé.
- **2.14-** Indiquez la méthode de calcul du couple  $C_{S1}$  en détaillant le théorème utilisé et en expliquant comment obtenir chacun des termes intervenant dans ce théorème.



#### Moulin à huile

#### Etude de cinématique et de cinétique

L'étude porte sur un moulin à huile traditionnel tel que photographié ci contre.

Le bâti est constitué par le local du moulin et la meule « dormante » (fixe). Au centre de cette meule est positionné un arbre portant une couronne dentée. Cet arbre est maintenu vertical par la charpente du local et peut tourner sur lui même suivant l'axe vertical. Il est entrainé par un pignon (non visible ici) lui même mû par une roue hydraulique. La meule tournante est entrainée en rotation par l'arbre et repose sur la meule dormante. Les fruits à écraser passent entre les deux meules.

## modélisation cinématique

Au bâti « 0 » est lié le référentiel  $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ .

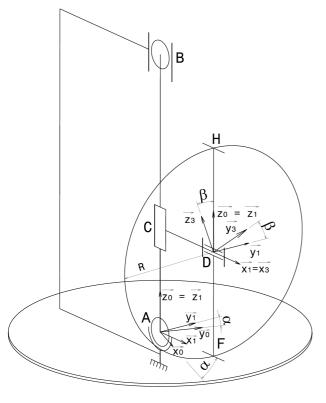
L'arbre vertical « 1 », de masse  $m_1$  est en liaison rotule en A avec le bâti et en liaison linéaire annulaire de centre B, d'axe  $\vec{z_{0,1}}$  avec le bâti. Il lui est associé le référentiel  $(A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_{0,1}})$  .  $\widehat{\vec{x_0}}, \widehat{\vec{x_1}} = \widehat{\vec{y_0}}, \widehat{\vec{y_1}} = \alpha(t) = \alpha$ 

Il porte en son sommet un engrenage « conique » qui engrène avec l'arbre moteur

L'arbre moteur est en liaison pivot en E avec le bâti. Il engrène avec l'arbre vertical par un engrenage « conique ». Il ne fera pas l'objet de cette étude.

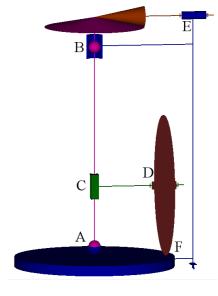
L'arbre porte meule « 2 » de masse  $m_2$  est en liaison glissière suivant l'axe AB avec l'arbre vertical. Il lui est associé le référentiel  $(C, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_{0,1}})$ 

La meule tournante « 3 » de masse  $m_3$  et de centre d'inertie D est en liaison pivot de centre D et d'axe  $\vec{x_1}$  avec l'arbre porte meule. Elle est supposée en liaison ponctuelle en F avec la meule dormante en F, et supposer rouler sans glisser sur celle-ci. Il lui est associé le référentiel  $(D, \vec{x_{1,3}}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ .  $\widehat{\vec{y_1}}, \widehat{\vec{y_2}} = \widehat{\vec{z_{0,1}}}, \vec{z_3} = \beta(t) = \beta$ 



 $\overrightarrow{AB} = L \overrightarrow{z_{0,1}}$ ,  $\overrightarrow{CD} = d \overrightarrow{x_{1,3}}$   $\overrightarrow{AF} = d \overrightarrow{x_{1,3}}$   $\overrightarrow{AC} = R \overrightarrow{z_{0,1}}$ . La meule tournante est de rayon R. Le point E est suffisamment haut pour ne pas gêner le mécanisme étudié.







### Cinématique

Les résultats seront donnés en fonction des paramètres a, b, L, d et R et des autres données de l'énoncé. Ne pas chercher à projeter les vecteurs dans une base particulière, sauf mention contraire dans la question.

- 1. Faire les schémas plans paramétrés permettant de passer de la base « 0 » à la base « 3 »
- 2. Déterminer  $\overline{\Omega(1/0)}$ ,  $\overline{\Omega(3/0)}$
- 3. Déterminer  $\overline{V(C/0)}$   $\overline{V(D/0)}$ . En déduire les torseurs cinématique  $\{V(1/0)\}$  exprimé au point C et  $\{V(3/0)\}$  exprimé au point D.
- 4. Écrire la condition de roulement sans glissement entre 3 et 0 au point F. En déduire une relation entre  $\Omega(3/1)$  et  $\Omega(1/0)$
- 5. Dans le mouvement de « 3 » par rapport à « 0 » donner
  - 1. La vitesse de roulement entre « 3 » et « 0 »
  - 2. La vitesse de pivotement entre « 3 » et « 0 »
- 6. Déterminer  $\overline{a(D/0)}$
- 7. Déterminer  $a(F \in 3/0)$

#### Géométrie des masses

- 8. La meule « 3 » est assimilable à un cylindre creux de rayon extérieur R, de rayon intérieur r et de largeur a, d'axe  $\vec{x}_{1,3}$ .
  - 1. Donner la forme de la matrice d'inertie « 3 » en son centre d'inertie. Justifier pourquoi certains éléments de cette matrice sont nuls.
  - 2. Quelle particularité de la matrice d'inertie de « 3 » nous permet de l'exprimer dans la base « 1 » ?
  - 3. Donner finalement la matrice d'inertie de « 3 », en D et en projection dans la base « 1 » : I(D,3)
- 1. L'arbre porte meule « 2 »est assimilable à un cylindre de centre  $G_2$ , tel que  $\overline{CG_2} = b \overline{x_{1,3}}$ , de rayon r et de longueur 2b.
  - 1. Déterminer la matrice d'inertie de « 2 » en  $G_2$  :  $I(G_2,2)$ .
  - 2. Transférer cette matrice d'inertie en C : I(C,2)
- 10. L'arbre vertical « 1 » est assimilable à un cylindre de rayon ρ et de longueur L situé entre A et B
  - Donner la position du centre d'inertie de « 1 » dans le repère « 1 »
  - 2. Déterminer la matrice d'inertie de « 1 » en C : I(C,1)
- 11. Justifier pourquoi, au cours du fonctionnement, nous pouvons considérer que « 1 » et « 2 » forment un seul et même solide
- 12. Déterminer alors
  - 1. la position du centre de masse de « 1 »+« 2 » G<sub>1+2</sub> relativement au point C
  - 2. la matrice d'inertie de l'ensemble « 1 »+« 2 » au point C en projection dans la base 1: I(C,{1+2})

## Cinétique

- 13. Calculer le moment cinétique de « 3 » relativement à « 0 », au point D, en projection dans la base « 1 »  $\overline{\sigma_{ID}(3/0)}$ . Justifier les simplifications éventuelles du calcul
- 14. Calculer le moment cinétique de « 1 »+« 2 » relativement à « 0 », au point C, en projection dans la base « 1 »  $\sigma_{IC}(\{1+2\}/0)$  . Justifier les simplifications éventuelles du calcul
- 15. Ecrire le torseur cinétiques  $\{C(3/0)\}$  exprimé au point D et dans la base « 1 »
- 16. Ecrire le torseur cinétiques  $\{C(\{1+2\}/0)\}$  exprimé au point C et dans la base « 1 »
- 17. Calculer le moment dynamique de « 3 » relativement à « 0 », au point D, en projection dans la base « 1 »  $\overline{\delta_{ID}(3/0)}$ . Justifier les simplifications éventuelles du calcul
- 18. Calculer le moment dynamique de « 1+2 » relativement à « 0 », au point C, en projection dans la base « 1 »  $\overline{\delta_{IC}(\{1+2\}/0)}$  . Justifier les simplifications éventuelles du calcul
- 19. Ecrire le torseur dynamique  $\{D(3/0)\}$  exprimé au point D et dans la base « 1 »
- 20. Ecrire le torseur dynamique  $D(\{1+2\}/0)$  exprimé au point C et dans la base « 1 »

Barème: 1 point par question

Outil



# Étude cinétique et dynamique du mouvement d'une tête à aléser sur centre d'usinage

## Consignes

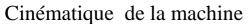
Durée: 2 heures

Calculatrices interdites - documents interdits à l'exception d'un résumé de cours A4 Recto Verso à rendre avec la copie.

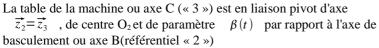
 $\langle\langle X \rangle\rangle$ 

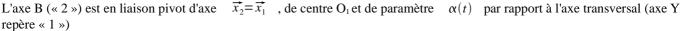
#### Mise en situation

L'un des outils destinés à la finition d'un alésage s'appelle une « tête à aléser ». Monté sur une broche de fraiseuse, sa dissymétrie entraîne des effets dynamiques que nous allons étudier ci dessous.

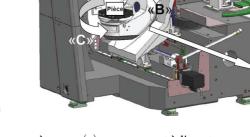


La broche « 6 » est en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  et de paramètre  $\theta(t)$ connu par rapport à l'axe vertical ou axe Z (référentiel « 5 ») L'axe Z (« 5 ») est en liaison glissière d'axe  $\vec{z_0}$  et de paramètre connu z(t) par rapport à l'axe longitudinal ou axe X (référentiel « 4 ») L'axe X (« 4 ») est en liaison glissière d'axe  $\overrightarrow{x_0}$  et de paramètre connu x(t) par rapport au bâti de la machine (référentiel « 0 »)





L'axe Y (repère « 1 ») est en liaison glissière d'axe  $\vec{y}_0$  et de paramètre y(t) par rapport au bâti de la machine.



### Paramétrage

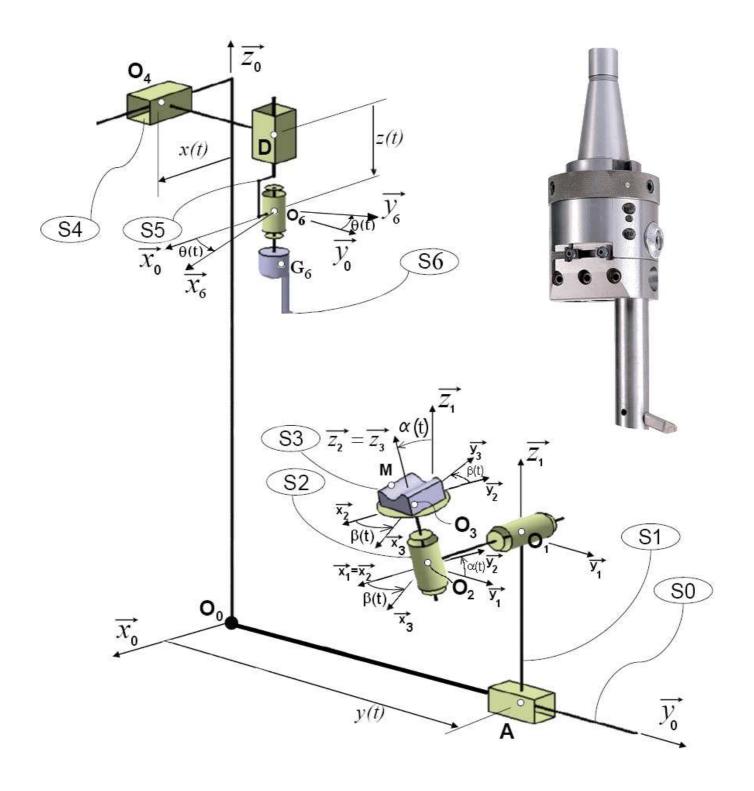
	Masse	Centre d'inertie	Repère associé
Solide « 0 » (bâti)	$m_0$	$G_0$	$R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$
Solide « 4 » : Axe X	$m_4$	$O_4$	$R_0(O_{0,}\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$
Solide « 5 » : Axe Z	$m_5$	$O_6$	$R_0(O_{0,}\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$
Solide « 6 » : Axe de broche + tête à aléser	$m_6$	$G_6$	$R_6(O_{6,}\overrightarrow{x_6},\overrightarrow{y_6},\overrightarrow{z_{0,6}})$

Nous supposerons que les solides « 4 », « 5» et « 6 » ont respectivement pour matrice d'in

Solide « 4 »: 
$$I(O_4,4) = \begin{pmatrix} A_4 & -F_4 & -E_4 \\ -F_4 & B_4 & -D_4 \\ -E_4 & -D_4 & C_4 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$$
 Solide « 5 »:  $I(O_6,5) = \begin{pmatrix} A_5 & -F_5 & -E_5 \\ -F_5 & B_5 & -D_5 \\ -E_5 & -D_5 & C_5 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$  Solide « 6 »:  $I(G_6,6) = \begin{pmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & B_6 & -D_6 \\ 0 & -D_6 & C_6 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$ 



# Schéma cinématique



L.G. 2 dimanche 23 janvier 2011

 $<sup>1\</sup> Le$  système étudié s'appuie sur un sujet proposé au concours ATS de l'ENSEA – année 2006



# Questions

#### Le sujet comporte 34 points qui seront ramenés sur 20

#### Cinématique (8 points)

Les résultats seront exprimés en fonction des paramètres décrit ci dessus et si besoin de leur dérivées.

1.	Faire le schéma plans paramétré permettant de visualiser la rotations de $R_0$ à $R_6$ . En déduire le vecteur taux de r	otation
	associé. $\Omega(\overline{R_6/R_0})$	(1 point)
2.	Exprimer le vecteur vitesse $V(0_4/R_0)$	(1 point)
3.	Exprimer le vecteur vitesse $V(0_6/R_0)$	(1 point)
4.	Exprimer le vecteur vitesse $V(G_6/R_0)$	(2 points)
5.	Exprimer le vecteur accélération $\overline{a(0_6/R_0)}$	(1 point)
6.	Exprimer le vecteur accélération $\overline{a(G_6/R_0)}$	(2 point)

#### Cinétique (8 points)

- 7. Exprimer le moment cinétique du solide « 4 » dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $O_{4:}$   $\frac{\overline{\sigma_{10}(4/R_0)}}{(4/R_0)}$ (1 point)
- 8. Exprimer le moment cinétique du solide « 5 » dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $O_4$ : (1 point)
- 9. Exprimer le moment cinétique du solide « 6 » dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $O_6$ :  $\sigma_{/0_6}(\overline{6/R_0})$  (1 point)
- 10. Exprimer le torseur dynamique du solide 4 relativement au référentiel  $R_0$ :  $D(4/R_0)$  réduit au point  $O_4$  (1 point)
- 11. Exprimer le torseur dynamique du solide 5 relativement au référentiel  $R_0$ :  $\left[D(5/R_0)\right]$  réduit au point  $O_6$ . Déplacer ensuite ce torseur au point  $O_4$ . (2 points)
- 12. Exprimer le torseur dynamique du solide 6 relativement au référentiel  $R_0$ :  $[D(6/R_0)]$  réduit au point  $O_6$ . Déplacer ensuite ce torseur au point  $O_4$  (2 points)

## Dynamique (18 points)

Nous étudions les déplacements rapide de la machine, aucun contact entre l'outil et la pièce n'ayant lieu dans ce cas.

- 13. Tracer le graphe des liaisons concernant la broche de la machine (sans s'intéresser à la table de la machine). Vous supposerez connues toutes les lois de mouvement calculées par le directeur de commande numérique : x(t), z(t) et  $\beta(t)$ . Elles sont imposées par des moteurs (linéaires sur l'axe X et Z, moteur couple sur l'axe de broche), et génèrent des forces motrices ( $F_x$ , et  $F_z$ ), et couple moteur ( $F_x$ ) inconnus (2 points)
- 14. Analyser le problème complet : quelles sont les inconnues, combien espérez vous obtenir d'équations ? Faire le bilan, conclure.
  - Proposer une stratégie de résolution pour obtenir les efforts dans les liaisons en O<sub>6</sub>, D,O<sub>4</sub> et les forces motrices. (4 points)
- 15. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide « 6 ». Ecrire les équations au point  $O_6$  permettant de déterminer les inconnues d'efforts dans la liaison pivot en  $O_6$  et le couple  $C_M$  en fonction de  $\theta(t)$ , x(t), z(t), de leurs dérivées et des données de l'énoncé. (6 points)
- 16. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {4+5+6}. Ecrire les équations au point O<sub>4</sub> permettant de déterminer les inconnues d'efforts dans la liaison glissière en O<sub>4</sub> ainsi que la force motrice du moteur linéaire de l'axe X en fonction de θ(t),x(t), z(t), de leurs dérivées et des données de l'énoncé. (6 points)



#### **CENTRE D'USINAGE 5 AXES A GRANDE VITESSE**

## Consignes

Durée: 2 heures

Calculatrices interdites - documents interdits à l'exception d'un résumé de cours A4 Recto Verso à rendre avec la copie

#### Mise en situation.

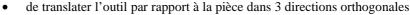
La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante. L'outil se déplace par rapport à la pièce installée sur la machine outil. C'est le mouvement d'avance.

Le fraisage est un procédé d'usinage particulier dans lequel l'outil doit en plus

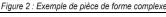


tourner sur lui-même par rapport au bâti de la machine outil pour pouvoir couper la matière. C'est le mouvement de coupe.

Les contraintes d'accessibilité pour l'usinage de formes complexes (figures 1 et 2) justifient l'utilisation de machines outils spécifiques capables :



 d'orienter l'axe de l'outil par rapport à la pièce autour de 2

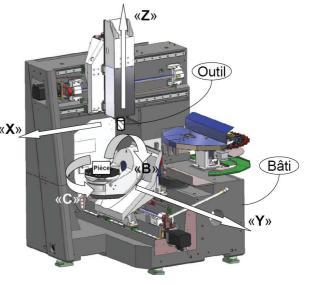


directions.

Le centre d'usinage « 5 axes » HSM 600U de la société Mikron, représenté sur la figure 3, permet l'usinage de formes complexes. Il est constitué d'un bâti supportant :

- 2 « axes » pour la mise en mouvement de l'outil par rapport au bâti. Ces 2 translations sont notées « X » et « Z ».
- 3 « axes » pour la mise en mouvement de la pièce par rapport au bâti. Une troisième translation est notée « Y » et les 2 rotations sont notées « B » et « C ».
- un dispositif de mise en rotation de l'outil autour de son axe géométrique par rapport au bâti. Cette rotation génère le mouvement de coupe.

Le but du problème est de calculer les actions mécaniques dans les liaisons pivot en O1 et en O2 ainsi que les couples moteurs des axes C et B.



Outi

## Cinématique de la machine

La broche est en liaison pivot d'axe  $\vec{z_0}$  par rapport à l'axe vertical (ou axe Z repère « 5 »)

L'axe Z est en liaison glissière d'axe  $\overrightarrow{z_0}$  et de paramètre connu z(t) par rapport à l'axe longitudinal (ou axe X repère « 4 »).

L'axe X est en liaison glissière d'axe  $\overrightarrow{x_0}$  et de paramètre connu x(t) par rapport au bâti de la machine

La table de la machine (axe C repère « 3 ») est en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$ , de centre  $O_2$  et de paramètre  $\beta(t)$  par rapport à l'axe de basculement (Axe B)

L'axe B (repère « 2) est en liaison pivot d'axe  $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$ , de centre  $O_1$  et de paramètre  $\alpha(t)$  par rapport à l'axe transversal (axe Y repère « 1 »)

L'axe Y (repère « 1 ») est en liaison glissière d'axe  $\overrightarrow{y_0}$  et de paramètre y(t) par rapport au bâti de la machine. Noter que, du fait des translations, les vecteurs unitaires indicés "0" et les vecteurs unitaires indicés "1" sont identiques.

Performances des axes « X », « Y » et « Z » du centre d'usinage.

	Variable	Course	Vitesse maximale	Couple moteur max.
Axe « X »	x(t)	800 mm	40 m/min	42 Nm
Axe « Y »	y(t)	600 mm	40 m/min	Non communiqué
Axe « Z »	z(t)	500 mm	40 m/min	Non communiqué

L.G. 1/4 dimanche 23 janvier 2011

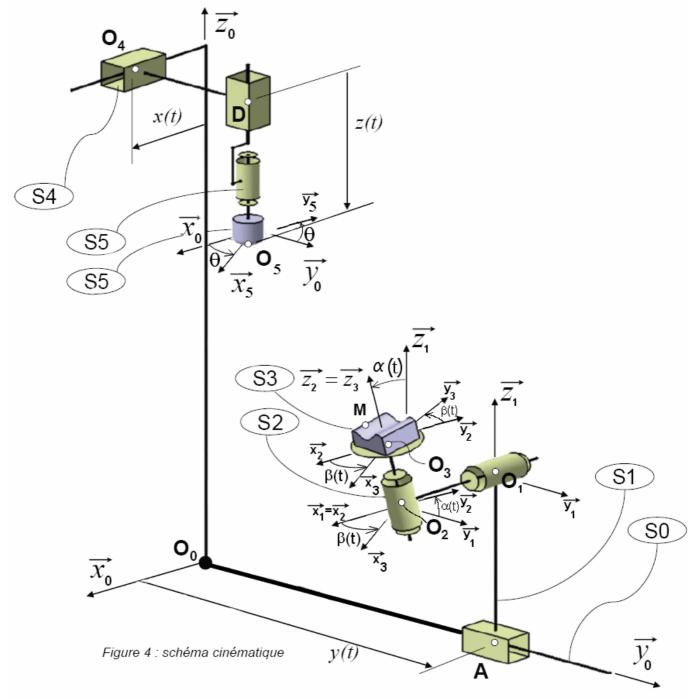


Performances des axes « B » et « C » du centre d'usinage.

	Variables	Course	Vitesse maximale	Accélération angulaire	Couple moteur
Axe « B »	$\alpha(t)$	+ 30° / - 110°	150 tours/min	50 rd/s <sup>2</sup>	680 Nm
Axe « C »	$\beta(t)$	360°	250 tours/min	100 rd/s <sup>2</sup>	340 Nm

Performances de la broche

	Variables	Course	Vitesse maximale	Puissance max	Couple moteur
Broche	$\theta$ (t)	Infinie – deux sens	35 000 tr/min	30 kw	680 Nm
		de rotation			



Le système étudié s'appuie sur un sujet proposé au concours ATS de l'ENSEA – année 2006



 $L_{\text{ETIENNE}_2}, l_3 L_4 L_5$ : constantes liées à l'architecture de la machine.

	Masse	Centre d'inertie	Repère associé
Solide « 0 » (bâti)	$m_0$	$G_0$	$R_0(O_{0,}\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$
Solide « 1 » : Axe y	$m_1$	$O_2$	$R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}) = R_1(O_1, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$
Solide 2 : Axe B	$m_2$	$O_2$	$R_2(O_2, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)$
Solide 3 : Axe C : table machine	$m_3$	$O_3$	$R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Solide « 2 »: 
$$I(O_2,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$
 Solide « 3 »:  $I(O_3,3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z}_{2,3})}$ 

## Questions

## Cinématique (5 points)

- Faire les schémas plans paramétrés permettant de visualiser les rotations de R1 à R2 puis de R2 à R3. En déduire les vecteurs taux de rotation associés. Exprimer le vecteur taux de rotation  $\Omega_{(3/0)}$ (1 point)
- Exprimer le vecteur vitesse (1 point)
- Exprimer le vecteur vitesse (1 point)
- Exprimer le vecteur accélération  $a(0_2/R_0) = a(0_2/R_0)$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Exprimer le vecteur accélération  $a(0_3/R_0) = a(0_3/R_0)$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
- (1 point)

## Cinétique (5,5 points)

- Calculer le moment cinétique du solide « 2 » dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $O_2$ :  $\overline{\sigma_{0}(2/R_0)}$  en projection dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
- Expliquer les particularités de la matrice d'inertie du solide « 3 » en O<sub>3</sub>. (1 point)
- Calculer le moment cinétique de la table « 3 » dans son mouvement par rapport au repère R<sub>0</sub> exprimé au point O<sub>3</sub> :  $\overline{\sigma_{0_1}(3/R_0)}$  en projection dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
- Calculer le moment dynamique du solide « 2 » dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  exprimé au point  $O_2$ :  $\overline{\delta_{0_2}(2/R_0)}$  en projection dans la base  $(\overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2})$  En déduire le torseur dynamique  $[D(2/R_0)]$  réduit au point  $O_2$  et exprimé dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1 point)
- 10. Calculer le moment dynamique de la table « 3 » dans son mouvement par rapport au repère R<sub>0</sub> exprimé au point O<sub>3</sub> :  $\delta_{0_3}(3/R_0)$  en projection dans . En déduire le torseur dynamique  $D(3/R_0)$  réduit au point  $O_3$  et exprimé dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (1,5 points)



## Dynamique (11 points)

Nous étudions les déplacements rapide de la machine, aucun contact entre la fraise et la pièce n'ayant lieu dans ce cas.

- 11. Tracer le graphe des liaisons pour la table de la machine. Vous supposerez connues toutes les lois de mouvement calculées par le directeur de commande numérique : y(t),  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ . Elles sont imposées par des moteurs (linéaires sur l'axe Y, rotatif sur les axes B et C), et génèrent des forces motrice ( $F_y$ ), et couples moteurs ( $F_y$ ) inconnus au niveau des moteurs.
  - Analyser le problème complet : quelles sont les inconnues, combien espérez vous obtenir d'équations ? Faire le bilan, conclure. (2 points)
- 12. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la table « 3 ». Ecrire les équations au point  $O_3$  dans la base  $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$  permettant de déterminer les inconnues d'efforts dans la liaison pivot en  $O_2$  + le couple  $C_c$  en fonction de  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ , y(t), de leurs dérivées et des données de l'énoncé. (3,5 points)
- 13. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {« 2 »+« 3 »}. Ecrire les équations au point  $O_2$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  permettant de déterminer les inconnues d'efforts dans la liaison pivot en  $O_1$ + le couple  $C_B$  en fonction de  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ , de leurs dérivées et des données de l'énoncé. (4,5 points)
- 14. Question bonus : S'il vous reste du temps : Résoudre les équations obtenues en question 12 et 13. (1 point)